OSCAR VARSAVSKY

ALGEBRA PARA ESCUELAS SECUNDARIAS

Tomo I

Matemática intuitiva

EUDEBA / TEXTOS DEL SECUNDARIO

ÁLGEBRA PARA ESCUELAS SECUNDARIAS

OSCAR VARSAVSKY

Este texto para la Matemática del segundo año de las escuelas secundarias se propone introducir los nuevos métodos y objetivos de enseñanza de la materia, que significan una profunda revisión de los programas en vigencia. La necesidad de una renovación casi total ha hallado eco inmediato en todo el mundo, pues, tal como se la encara actualmente, la matemática aparece como una asignatura inútil y árida, ni formativa ni informativa. En nuestra época, en la que todas las ramas de la ciencia, las profesiones, la técnica y los oficios requieren el uso de un lenguaje formal riguroso y de cálculos complicados, esta situación no podía prolongarse durante mucho tiempo.

La Subcomisión Argentina de la Comisión Internacional de Enseñanza de la Matemática preparó un proyecto de plan de estudios moderno para los colegios secundarios, que se aplica experimentalmente con la colaboración de la Secretaría de Educación, las universidades nacionales y el Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas.

El primer año, según dicho plan, está dedicado a la geometría —desde un punto de vista más intuitivo que formal—, a describir las propiedades más útiles de las figuras y la operatoria matemática correspondiente. La participación activa del alumno se considera esencial. El segundo año comprende dos partes. La primera se dedica a la introducción —sin pretensiones de rigor— los conceptos fundamentales del lengu matemático: conjuntos, relaciones, funcic nes, operaciones; y se trata de ilustrarlos con ejemplos y motivaciones no matemáticas, tomadas de la vida cotidiana. Además, se introduce el método de los diagramas de flujo para aclarar razona-

Álgebra para escuelas secundarias

La escuela en el tiempo
Textos del secundario/Matemáticas

OSCAR VARSAVSKY

Álgebra para escuelas secundarias

Tomo 1
Matemática intuitiva

EDITORIAL UNIVERSITARIA DE BUENOS AIRES

PREFACIO

Estamos en época de grandes cambios en la enseñanza secundaria, en todas partes del mundo. Es que los educadores tienen la sensación que la brecha existente entre la enseñanza actual y las necesidades culturales del hombre moderno, debe ser llenada urgentemente o se convertirá en un abismo infranqueable. El maravilloso mundo de la ciencia está convirtiéndose en algo cada vez más extraño e incomprensible para el hombre común. Eso es peligroso e innecesario.

La visión del mundo que ofrece la ciencia actual, desde el átomo hasta las sociedades humanas, está al alcance de los jóvenes, en su panorama general si no en sus detalles. Ése es el objetivo del movimiento de reforma educativa que espontánea y simultáneamente se está desarrollando en tantos países.

Una de las principales características de esta mentada ciencia moderna es el uso de la Matemática, sea a través de sus resultados especiales, sea simplemente como lenguaje para razonar claramente. Por eso no es de extrañar que en muchos lugares la reforma de la enseñanza comience por esta materia. Si ella no se actualiza, será difícil modernizar las demás.

Además es preciso reconocer que hasta ahora la Matemática recibía el tratamiento más anticuado entre todas las ciencias que se enseñan en la escuela secundaria. La Geometría euclídea como teoría deductiva y un poco de álgebra operativa de la más árida constituían casi el total de los programas. Los resultados son bien conocidos por todos.

Ahora como antes, pretendemos que la Matemática tenga doble misión: formativa e informativa. Pero en ambas es el Álgebra, y no la Geometría, la que desempeña el papel principal.

En el aspecto informativo eso es fácil de entender, pues es mucho más importante manejar las propiedades de conjuntos, funciones, vectores, probabilidad, que las de polígonos o paralelas.

Pero también desde el punto de vista formativo tiene desventajas la Geometría, pues es difícil enseñar a deducir en un sistema con tantos axiomas. El Álgebra ofrece en cambio muchos ejemplos de estructuras importantes y axiomáticamente sencillas. Ninguna mejor que la de los números naturales y sus sucesivas ampliaciones para ilustrar al joven sobre el poderío de la abstracción y la deducción.

Por eso este curso no contiene prácticamente nada de Geometría.

Lo hemos dividido en dos partes: Matemática Intuitiva y Matemática Deductiva o Axiomática.

En la primera parte, que constituye este tomito, el énfasis está en el aspecto informativo. Deseamos que el estudiante se familiarice con el lenguaje de los conjuntos, relaciones, funciones y operaciones, con ejemplos extraídos tanto de la vida cotidiana y de otras ciencias como de la Aritmética elemental y de la Geometría vista en primer año.

El estudiante debe aprender a manejar las operaciones conjuntistas, debe saber definir y representar relaciones y funciones, reconocer un orden y una equivalencia entre objetos cualesquiera, com poner funciones, hallar ejemplos de operaciones no conmutativas o no asociativas, etc. Pero sobre todo se pretende que sepa aplicar estas ideas y esta terminología en todos los terrenos de su experiencia personal. Se desea que se apropie de este lenguaje.

En esta primera parte no pretendemos en cambio ser rigurosos. No damos axiomas ni definiciones explícitas. Nos mantenemos, dentro de lo posible, en un plano intuitivo, pero sin renunciar a las demostraciones.

La única innovación formativa es la introducción de los diagramas de flujo, tanto para instrucciones como para deducciones.

Aparte de su utilidad práctica, estimamos que son de un valor incalculable para enseñar a analizar razonamientos complicados en sus componentes más sencillas. Enseñan a usar variables de la manera más legítima. Y por último pueden ser entretenidos como juegos.

Después de mucho pensarlo, decidimos no dar a la Lógica tanta importancia como aconsejan muchos expertos extranjeros. Solo damos en la primera parte algunas nociones generales y vagas sobre proposiciones y ciertos tipos de razonamientos comunes en Matemática. En la segunda parte explicamos con poco detalle qué es una deducción y pasamos rápidamente a ilustrar cómo son y cómo se usan los sistemas axiomáticos. En ninguna parte hablamos del cálculo proposicional. Creemos que eso podrá hacerse ahora con toda facilidad y más detalle al dictarse el curso de Lógica.

Si los alumnos se acostumbran a pensar utilizando los conceptos de función, relación y conjunto, se habrá logrado lo esencial de la proyectada reforma. Para ello será utilísima la colaboración de los profesores de otras materias.

En la segunda parte se introduce axiomáticamente el número natural partiendo de la función "sucesor", es decir, a la manera de Peano. Hay dos capítulos introductorios que explican los objetivos del método axiomático y las propiedades intuitivas del principio de inducción completa sobre varios ejemplos comparados.

Luego se hace la teoría deductiva de la suma de números naturales, con demostraciones completas. Para las demás operaciones y el orden se procede con menos detalle.

Un experimento es el capítulo sobre conjuntos infinitos. No sabemos qué parte de él será comprendida adecuadamente por los alumnos. De todos modos su contenido informativo creemos que despertará interés, por lo curioso y no trivial, y entonces no será tan importante que no se alcancen a seguir todos los argumentos lógicos.

El cero se da en un capítulo especial, para recalcar sus propiedades y como primer ejemplo de extensión de los naturales.

Los números negativos se introducen como números naturales con una marca cualquiera (la más sencilla tipográficamente es un signo menos arriba del número). Luego se introduce naturalmente el signo negativo. Este método nos parece muy preferible al de los pares de naturales, pues trabajar con clases de equivalencia es siempre un inconveniente.

Por desgracia este inconveniente es inescapable en el caso de los racionales, pero aquí tenemos la ventaja de poder mostrar a los alumnos su necesidad, intentando primero hacer la extensión con quebrados y llegando a la conclusión de que hay que remplazar la igualdad por una equivalencia.

Esta edición es previa en más de un sentido. No se puede hablar de textos definitivos cuando se está en plena etapa experimental. Los resultados de los ensayos se irán reflejando en ediciones posteriores, si parece útil hacerlas, pero esperemos que su efecto principal sea estimular la aparición de otros textos sobre la base de la experiencia personal de los educadores que han asumido la responsabilidad de ensayar estas reformas.

Buenos Aires, enero de 1964.

Agradezco la valiosa colaboración de las profesoras María Delia Pigretti y Lucrecia Iglesias en la redacción de este texto.

Capítulo I

LA MATEMÁTICA: CIENCIA Y LENGUAJE DE LAS CIENCIAS

En los congresos internacionales de Matemática se reúnen miles de matemáticos de todos los países para discutir sus descubrimientos. ¿Qué cosas descubren? ¿De qué se ocupan? Se ocupan de tantas cosas diferentes que ya no hay ningún matemático que conozca lo que hacen todos sus colegas.

Los nombres de las ramas matemáticas modernas: Variedades diferenciales, Topología Algebraica, Álgebra Topológica, etc., etc., suenan más misteriosos aún que los de la Física o la Biología.

Todo nació del deseo y la necesidad de saber cada vez más sobre los números, las figuras geométricas, y todas las relaciones entre esos objetos creados por la mente humana.

Parece mentira que cosas aparentemente tan sencillas como uno, dos, tres, ... hayan tenido ocupados a tantos hombres de genio durante tantos siglos, y que cada vez haya más gente que se ocupe de eso, y que cada vez aparezcan más problemas de qué ocuparse, pero ya veremos poco a poco cómo eso es posible y natural.

Los matemáticos actuales, sin embargo, pocas veces hablan de números o figuras; muchas más hablan de las relaciones mismas. Así además de verificar que el 2 está antes que el 5 se preguntan qué es ordenar objetos cualesquiera; además de dar la fórmula para la superficie del círculo estudian qué es medir conjuntos en general. Se dice que plantean problemas más generales, más abstractos.

Y para estudiar estos problemas siguen un método especial pero que es el mismo que usamos todos cuando jugamos a las damas, al ajedrez o a otro juego cualquiera: decir cuáles son las piezas del juego, dar reglas bien precisas para usarlas, y luego moverlas sin hacer trampa. Esto basta para dar una idea de lo que es el famoso método axiomático. Al usarlo lo entenderemos mejor; veremos que los axiomas son como las reglas del juego, que razonar es como mover las piezas y que los teoremas nos dicen cuál es el efecto de hacer varias jugadas.

Para usar este método fue indispensable poder decir las cosas de manera que no pudiese haber confusiones. Todas las palabras debían ser definidas con exactitud, todos los razonamientos debían ser claros, evidentes. Eso obligó a introducir símbolos especiales (como se hace también para describir una partida de ajedrez), para poder resumir en forma sencilla y exacta lo que se iba diciendo, y la verdad es que, recién cuando se empezaron a usar símbolos de todas clases, pudo la Matemática ir más allá de lo que habían descubierto los griegos y otros pueblos de la Antigüedad. Los símbolos y fórmulas no tienen ninguna virtud mágica o misteriosa. Simplemente permiten decir en un renglón cosas que llenarían páginas. Pero solo gracias a esos resúmenes perfectos que son las fórmulas pudieron los hombres pensar en cosas cada vez más complicadas sin hacerse un embrollo de ideas. Este método y este lenguaje matemático han resultado para las demás ciencias tan importantes como los mayores descubrimientos. En efecto, el lenguaje que aprendemos tan trabajosamente en nuestra infancia, y que es lo primero que nos diferencia totalmente de los animales, se fue creando cuando las necesidades del hombre eran sencillas y sus ideas sobre el mundo limitadas e ingenuas. Mano, dolor, mamá, uno, muchos, son palabras que existen en todos los idiomas y que comprendemos desde muy temprana edad. Con palabras como ésas el hombre se las arregló durante muchos milenios para describir lo que veía y sentía, para dar explicaciones e instrucciones simples, y hasta para crear el arte literario.

Cierto es que pronto empezaron las confusiones y se vio la necesidad de definir claramente ciertos términos prácticos, como las unidades para medir y pesar, o los deberes y derechos de los individuos. Aquí se empezó a notar que algunas definiciones eran fáciles de darse a gusto de todos, pero muchas, no (crimen, libertad, tirano), y algunos conceptos no producían más que interminables discusiones filosóficas (bien, ser, materia, infinito). Pero a pesar de esto, el lenguaje ordinario era suficiente para todos.

La cosa empezó a cambiar hace apenas unos 300 años: sin duda el ejemplo más importante de la necesidad de un nuevo lenguaje fue la explicación del movimiento de los planetas que dio Newton. Sin el lenguaje matemático la teoría de Newton no podría haberse hecho y nuestra civilización basada en la ciencia no existiría. Las leyes de la Mecánica no se pueden expresar de la manera a que estamos acostumbrados en nuestra vida cotidiana, sino por fórmulas matemáticas.

Ahora ya no nos llama la atención que los hombres estudien y usen cosas que nada tienen que ver con la experiencia común, como los átomos, los genes, las galaxias, o cosas que por su complicación parecían inatacables, como la vida, la inteligencia, la sociedad, o que requieren una precisión mucho mayor que la de la mano o el ojo, como los satélites, las computadoras, los microscopios, la televisión.

Todo esto ha resultado de razonar, de usar el pensamiento.

Pero con el lenguaje común no es posible hacer los razonamientos complicadísimos y rigurosos que hacen falta para descubrir las ondas de la radio o la energía atómica. Para eso fue preciso usar la Matemática: el lenguaje de la ciencia.

El lenguaje ordinario describe la realidad como si dijéramos en borrador, sin orden ni prolijidad. Usar lenguaje matemático es pasar en limpio ese borrador. Dicho así no parece tener mucha importancia y, sin embargo, sin esa posibilidad de decir en forma clara y rigurosa las ideas que circulaban confusamente, no se las hubiese podido criticar y mejorar, y no existirían hoy los aviones, los televisores y las drogas que nos salvan la vida.

La ciencia es hoy una parte tan importante de nuestro mundo que aunque no tengamos ninguna intención de trabajar alguna vez como científicos, necesitamos comprender algo de sus alcances, sus resultados, sus métodos. Para ello debemos aprender algunos de los conceptos más sencillos de la Matemática, pero no como se usaban hace dos mil años, sino como se usan ahora: números, conjuntos, relaciones y funciones, vectores, probabilidad, geometría. Y debemos aprender cómo se trabaja en Matemática con esos conceptos: lo que hemos llamado el método axiomático.

Proposiciones e instrucciones

Gran parte de la tarea de los matemáticos consiste en demostrar que ciertas afirmaciones son verdaderas y otras son falsas.

"Las tres bisectrices de un triángulo se cortan en un punto", es verdadera.

"Todos los números primos son impares" es falsa.

Estas frases en las que se afirma algo, que puede ser verdadero o falso, se llaman proposiciones. Una proposición no es cualquier conjunto de palabras, sino que debe expresar algo verdadero o algo falso.

Así "El perro" no es una proposición, pues no es ni verdadero ni falso. "Me gusta el mar" es una proposición, porque aunque nadie más que yo sepa si es cierta o falsa, todos saben que debe ser una de las dos cosas.

En cambio "Dame ese libro" no es una proposición: las órdenes no son ciertas ni falsas; pueden ser posibles o imposibles, correctas o incorrectas, y muchos calificativos más, pero no tiene sentido decir que es cierto (o falso) "dame ese libro".

A estas frases las vamos a llamar instrucciones, como a las instrucciones para jugar a un juego, armar un motor o hacer una torta. En Matemática también se usan mucho las instrucciones: cuando aprendimos a sumar, multiplicar, sacar raíz cuadrada, lo hicimos siguiendo instrucciones, bastante complicadas por cierto.

En una demostración, en cambio, tenemos exclusivamente proposiciones. Algunas de ellas suponemos que son ciertas (axiomas, hipótesis), y queremos saber si la conclusión o tesis es también una proposición verdadera o si es falsa.

Inducción y deducción

¿Cómo se sabe si una proposición es cierta o falsa?

En la vida diaria, a cada momento estamos verificando proposiciones, porque lo necesitamos para actuar: "Este libro es pesado", "Éste es el tren de las 8 y 15"," Si suelto el cuchillo, caerá". Algunas de éstas son ciertas porque nuestros sentidos nos lo están diciendo: que una cosa es pesada o verde o dolorosa lo sabemos directamente.

Otras, como que las cosas que nadie sostiene caen, o que el sol saldrá mañana, o que si a un niño se le pega, llora, las sabemos ciertas por experiencia. Hemos visto que sucede así tantas veces que no dudamos que sean ciertas.

Y sin embargo muchas veces nos equivocamos, y proposiciones que creímos ciertas no lo son. Ninguna conclusión que saquemos de la experiencia es totalmente segura. Si hasta ahora todas las veces que le hemos pegado a un niño ha llorado, eso no es garantía absoluta de que la próxima vez suceda lo mismo. Hay que tomar muchas precauciones y considerar todas las diferencias que puede haber de un caso a otro.

Cuando se toman todas las precauciones necesarias para estar bastante seguros de que se puede confiar en la experiencia, se dice que se ha hecho una inducción. Por inducción sabemos que el Sol saldrá mañana. La inducción es el método que usan la Física y otras ciencias para decir que ciertas proposiciones son verdaderas.

Pero ni siquiera podemos estar totalmente seguros de que el Sol saldrá mañana. Aunque lo afirme la experiencia, no hay una razón lógica, decimos, que lo haga obligatorio.

En cambio, si decimos: "Si todos los hombres son mortales y Sócrates es un hombre, entonces Sócrates es mortal", esta proposición es verdadera sin ninguna duda. Su verdad es evidente para todos los que sepan pensar. Es cierta por un razonamiento lógico, bien sencillo.

Éste es el tipo de verdades que acepta la Matemática. Nótese que no estamos diciendo que Sócrates es mortal, sino que si los hombres son mortales y si Sócrates es hombre, entonces Sócrates es mortal. Cuando esto ocurre, se dice que se ha hecho una deducción; las proposiciones iniciales llevan el nombre de premisas o hipótesis y la proposición que es verdadera con la sola condición de que sean verdaderas las premisas o hipótesis, se llama conclusión. Para representar una deducción podemos recurrir a un diagrama como el siguiente:

Todos los hombres son mortales	Sócrates es hombre

⇓

Sócrates es mortal

En cada rectángulo se encierra una proposición: los rectángulos a los que no llega ninguna flecha contienen premisas o hipótesis; los rectángulos de los que no parte ninguna flecha contienen conclusiones. Usamos la doble flecha para indicar que de uno o más rectángulos se deduce otro.

Es claro que haciendo este tipo de razonamiento no podemos equivocarnos nunca... siempre que lo hagamos bien.

Por ejemplo, tomemos como hipótesis que "Todas las brujas son viejas, feas y sucias" y "Doña Juana es una vieja fea y sucia". No está permitido deducir de ellas lógicamente que "Doña Juana es una bruja", pero hay gente capaz de llegar a esa conclusión. Estas fallas de razonamiento se llaman falacias. Supondremos que ninguno de los lectores de este libro comete falacias, por lo menos cuando habla de Matemática.

La falacia consistió en este caso en confundir una condición necesaria con una condición suficiente para ser bruja.

Al decir "Todas las brujas son viejas, feas y sucias" estamos diciendo que para que alguien sea una bruja es necesario que sea vieja, fea y sucia; una persona es una bruja solo si es vieja, fea y sucia.

Como todos los rectángulos tienen vértices, tener vértices es una condición necesaria para ser rectángulo; una figura es un rectángulo solo si tiene vértices.

Pero éstas no son condiciones suficientes. Si una figura tiene vértices, no por eso es forzosamente un rectángulo: puede ser un triángulo, un pentágono, etc. Y ser vieja, fea y sucia no es suficiente para ser bruja; hay que saber volar en una escoba, tener polvos mágicos, etc.

Tener 4 lados iguales y ángulos rectos es suficiente para ser rectángulo, pero no es necesario, pues aunque los lados no fueran iguales, también sería rectángulo.

Saber convertir un príncipe en un sapo es suficiente para ser bruja. Sacar 10 puntos es suficiente para aprobar un examen, pero no es necesario. Las condiciones suficientes se expresan con la palabra "si": si saco 10, apruebo. Si tiene 4 lados iguales y ángulos rectos, es rectángulo, etc.

Hay pues condiciones necesarias y condiciones suficientes para que ocurra algo, y no tienen por qué ser las mismas.

Cuando una condición es a la vez necesaria y suficiente, entonces es otra manera de decir la misma cosa. "Para aprobar un examen es necesario y suficiente sacar 4 o más puntos"; entonces "sacar 4 o más puntos" es lo mismo que "aprobar el examen": se dice que estas dos proposiciones son equivalentes. En lugar de "necesario y suficiente" puede decirse "si y solo si": "Aprobarás el examen si y solo si sacas 4 puntos o más". En general, al hablar uno dice "si sacas 4 puntos o más", pero no es lo mismo; eso solo dice que es suficiente sacar 4 puntos o más, pero deja suponer que a lo mejor también con 3 puntos se aprueba.

Todas las definiciones son condiciones necesarias y suficientes para usar la palabra definida:

"Un polígono se llamará pentágono si y solo si tiene 5 lados"

"Un vertebrado se llamará pez si y solo si respira por branquias".

"Para ser médico es necesario y suficiente tener un diploma de la Facultad de Medicina".

Los principales tipos de razonamientos lógicos que se usan en Matemática

1) La negación de una proposición. La negación de una proposición es otra proposición: "Esto no es un libro", "Dos no es primo" son proposiciones, negaciones de "Esto es un libro" y "Dos es primo". Si una es cierta, su negación es falsa y recíprocamente.

Demostrar que "Dos es primo" es cierto, es lo mismo que demostrar que "Dos no es primo" es falso. Y también, si pudiéramos demostrar que "Dos no es primo" es cierto, sería lo mismo que haber demostrado que es falso que "Dos es primo".

2) Las proposiciones universales. "Todos" quiere decir "cada uno" o "cualquiera". Para demostrar que todos los rectángulos tienen las diagonales iguales, hay dos posibilidades: demostrarlo uno por uno, para cada rectángulo, o si no demostrarlo para un rec

tángulo cualquiera, o sea que puede ser remplazado por cualquier otro sin cambiar la demostración. Estas afirmaciones que se hacen para todos los objetos de cierta clase se llaman afirmaciones universales y son muy comunes en Matemática. A veces ni escribimos la palabra "todos" en afirmaciones universales. Cuando decimos:"Las bisectrices de un triángulo se cortan en un punto" no queremos decir las de un solo triángulo, sino las de un triángulo cualquiera. También al decir "$a \times b = b \times a$" queremos decir que esa igualdad es cierta para todos los números a y b.

Si quisiéramos demostrar esa igualdad solamente para todos los números menores que 10, podríamos hacerlo caso por caso: $1 \times 2 = 2$ y $2 \times 1 = 2$ y por lo tanto $1 \times 2 = 2 \times 1$. Lo mismo para 1×3, etc., hasta 9×9. Si queremos demostrarla para todos los números este método no sirve pues no terminaríamos nunca.

En general es esto lo que ocurre y entonces, por supuesto que no alcanza con dar algunos ejemplos particulares, sino que hay que dar una demostración que sirva para cualquier caso. Así para demostrar que en todo triángulo las bisectrices se cortan en un punto, hay que hacerlo sin usar las propiedades de algunos triángulos especiales, como los equiláteros, sino las que se puedan deducir de la definición de triángulo.

En cambio para demostrar que una proposición universal es falsa, basta con mostrar un solo caso particular en que no se cumpla. Así "Todos los números primos son impares" es falso porque 2 es primo y no es impar. Esto se llama dar un contraejemplo.

3) Las proposiciones existenciales. Las palabras "hay" o "existe" aparecen en las afirmaciones existenciales. "Existen caballos con alas", "Hay una fracción que elevada al cuadrado es 3", "Existen números primos pares", son afirmaciones existenciales.

Para demostrar que una de estas afirmaciones es verdadera es suficiente con dar un ejemplo. Así, 2 es un número primo par, y por lo tanto existen números primos pares. Aunque se usa el plural, basta con que exista uno. "Existen" quiere decir "existe por lo menos uno"

En cambio para demostrar que algo no existe, o sea que una afirmación existencial es falsa, hay que tratar de decir lo mismo con la palabra "todo" o "cualquier".

Decir que no existe ninguna fracción que elevada al cuadrado dé 3, es lo mismo que decir que una fracción cualquiera, elevada al cuadrado, no da 3.

Entonces para demostrar que hay un caballo con alas basta mostrarlo, pero para demostrar que no los hay, es necesario probar que todos los caballos no tienen alas.

Como para probar esto, que es una afirmación universal, no es suficiente con mostrar un caballo sin alas (nos dirían "este caballo no tiene alas, pero tal vez otro sí"), todavía puede haber quien crea en caballos con alas, fantasmas, marcianos, etc. Demostrar que una cosa no existe es difícil en la vida diaria; por suerte en Matemática no es más difícil que cualquier otra demostración.

4) La reducción al absurdo. Afirmar que una proposición, por ejemplo "2 es par" es verdadera y falsa a la vez, o sea afirmar que "2 es par" y "2 no es par" son ambas verdaderas, es una contradicción.

Como ya dijimos, si una proposición es cierta su negación es falsa y recíprocamente. Por eso, si en un razonamiento se llega a una contradicción, algo está mal.

Entonces una manera bastante frecuente de demostrar que una proposición es falsa, es obtener a partir de ella una contradicción. Si en un razonamiento llegamos a demostrar que 211 es un número primo y también que 211 no es un número primo, entonces o el razonamiento ha sido incorrecto o alguna de las hipótesis en que nos hemos basado para hacer ese razonamiento es falsa.

Supongamos tener una tabla de números primos donde figura 211, y tenemos también un papel donde está escrito " $13 \times 17 = 211$ ". De esto último podemos deducir que 211 no es primo, pues es divisible por 13 y 17; pero del hecho que 211 figura en la tabla deducimos que 211 es primo. Hay una contradicción. Como el razonamiento que hemos hecho está bien claro y correcto, alguna de nuestras premisas es falsa.

O la tabla miente, o si no, 13×17 no da 211. Si estuviéramos convencidos de que 13×17 es 211, deduciríamos que lo que dice la tabla es falso. Claro que aquí es al revés: la tabla dice la verdad, y por lo tanto 13×17 no es 211 (y no nos hace falta saber cuánto es realmente 13×17). De la misma manera se puede probar que una proposición es verdadera; tendremos que demostrar que si la negamos vamos a llegar a una contradicción y por lo tanto la negación es falsa.

Este modo de probar que una proposición es verdadera se llama reducción al absurdo.

Por ejemplo: quiero demostrar por el absurdo que:

Juan tiene dientes (tesis)

sabiendo que:

Juan está comiendo un bife.

Comienzo negando la tesis:

Juan no tiene dientes

De esta proposición, por definición de "masticar" obtengo que:

Juan no puede masticar

Pero los bifes no se pueden comer sin masticarlos, entonces:

Juan no está comiendo un bife.

a la vez sé que:

Juán está comiendo un bife

} contradicción.

Como el razonamiento es correcto, la proposición de la que partimos, que es la negación de la tesis, es falsa:

Juan no tiene dientes

es falsa.

Entonces la tesis es cierta:

Juan tiene dientes.

Resumamos los pasos de una demostración por el absurdo.
Para demostrar que una proposición (la tesis) es cierta,

a) negamos la proposición, o sea afirmamos lo contrario.
b) con la proposición así negada, y otras proposiciones que se sepa que son ciertas, se razona correctamente hasta llegar a una contradicción.
c) como las otras son ciertas, y el razonamiento correcto, la contradicción se debe a que la negación de la tesis es falsa. Es falso lo contrario de nuestra proposición, o sea nuestra proposición es verdadera.

Ejercicios

Consideremos estas dos propiedades: "ser caballo" y "tener cabeza". Podemos aceptar que:

Los caballos tienen cabeza

o sea:

si algo es un caballo, entonces tiene cabeza

o:

es suficiente saber que algo es un caballo para saber que tiene cabeza.

o:

ser caballo es condición suficiente para tener cabeza.

Se dice también:

ser caballo implica tener cabeza.

Podemos expresar esto de un modo negativo:

No se puede ser caballo sin tener cabeza

o sea:

solo si algo tiene cabeza puede ser un caballo

o:

es necesario tener cabeza para ser caballo

o:

tener cabeza es condición necesaria para ser caballo.

En cambio, como hay muchos animales que tienen cabeza y no son caballos, podemos decir que:

No es suficiente tener cabeza para ser caballo

No es necesario ser caballo para tener cabeza.

Si estamos hablando de animales y las dos condiciones son: "ser insecto" y "tener 6 patas", ocurre que todos los insectos tienen 6 patas, y son los únicos animales de 6 patas.

ser insecto implica tener 6 patas

y

ser animal de 6 patas implica ser insecto.

Esto se expresa:

ser insecto es equivalente a tener 6 patas.

o:

un animal es un insecto si y solo si tiene 6 patas.

o:

ser insecto es condición necesaria y suficiente para tener 6 patas.

En cada una de las proposiciones siguientes hay dos propiedades. Decir si alguna de ellas implica la otra, o si son equivalentes.

Expresar cada proposición de todas las formas posibles, como se hizo en los ejemplos anteriores.

1) Los aviones son vehículos.
2) Las fracciones son números.
3) Los planetas giran alrededor del sol.
4) Los cuadriláteros que tienen los lados opuestos iguales son paralelogramos.
5) El que nace, muere.
6) Los múltiplos de 2 terminan en 2 .
7) Los múltiplos de 3 terminan en 3 .
8) Los múltiplos de 10 terminan en 0 .

Falacia es cualquier razonamiento que tiene apariencia de verdadero y es falso.

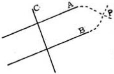
Tratar de explicar por qué son falaces estos razonamientos:

9) Juan me ha dicho que sus amigos, si lo ven en un apuro, siempre tratan de ayudarlo. Hace poco le pregunté si Pedro era amigo suyo y me contestó que no. Por lo tanto, Pedro lo ha visto en apuros y no le ha prestado ayuda.
10) Eres tolerante con tus hijos y ninguno te obedece. La conclusión es muy clara: ¡Usa el rigor y te obedecerán!
11) No pueden ustedes tomar en serio la acusación que Pérez se atreve a lanzar contra mí. Desde que éramos compañeros de escuela le molestaban mis triunfos. Y ahora le molesta ver que en un mes gano lo que él no gana en todo el año.

Ejemplos de demostraciones por el absurdo.

Vamos a probar por el absurdo que en un plano dos rectas diferentes perpendiculares a una tercera son paralelas entre sí.

Conocemos: 1°) la definición de rectas paralelas: dos rectas diferentes de un mismo plano son paralelas si y solo si no tienen ningún punto común. 2°) Además sabemos que dados una recta y un pun



to, por el punto solo se puede trazar una perpendicular a la recta. 3º) Hablamos de 2 rectas A y B , las dos perpendiculares a C .

La tesis es: recta $A \parallel$ recta B.

Comenzamos la demostración negando la tesis: $A \not\parallel B$.

Si A no es paralela a B , A y B se cortan en un punto p (por 1º) y por p pasan , entonces, las 2 rectas, A y B , que son perpendiculares a C (por 3º): $A \perp C$ y $B \perp C$.

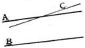
Pero sabemos que por un punto solo pasa una $\perp$ a C (por 2º) . Contradicción.

De todo lo que hemos usado para llegar a esta contradicción , lo único que no es seguro es que $A \not\parallel B$

Entonces $A \not\parallel B$ falso.

Luego $A \parallel B$ es cierto.

12) Con la misma definición de rectas paralelas y, aceptando también que por un punto exterior a una recta solo se puede trazar una paralela a ella, demostrar por el absurdo esta propiedad:



Si una recta corta a una de dos paralelas, corta también a la otra.

Falsa inducción

13) Si tomo un número natural cualquiera, le sumo su cuadrado, y al resultado le sumo 41 , obtengo un número primo.

Demostración:

Para 1 es cierto, pues $1+1^2+41 = 43$, que es primo
Para 2 " " , " $2+2^2+41 = 47$, " " "
Para 3 " " , " $3+3^2+41 = 53$, " " "
Para 4 " " , " $4+4^2+41 = 61$, " " "

y podemos seguir verificándolo para 5 , 6 , 7 hasta 39 .

¿Es ésta una demostración correcta?

¿Es verdadero el teorema? (Probar con 40)

Capítulo II

CONJUNTOS

Los conjuntos y sus elementos.

Todos sabemos usar la palabra "conjunto"; a cada momento estamos hablando de conjuntos de personas, de animales, de objetos de toda clase.

La familia Pérez es un conjunto de personas: padre, madre e hijos; cada una de ellas es un miembro de ese conjunto.

En vez de "miembro" se suele decir también elemento de un conjunto. Las dos palabras significan lo mismo.

Un rebaño es un conjunto de ovejas; cada una de las ovejas es un miembro o elemento de ese conjunto. De esas ovejas, las que notienen cría forman también un conjunto; el de las ovejas sin cría. El rebaño y su pastor forman otro conjunto. El pastor y las ovejas con cría son los elementos de un nuevo conjunto.

Los objetos que están sobre mi mesa.
Las monedas que tengo en el bolsillo.
Los números de una sola cifra.
Los triángulos equiláteros.
Los alumnos de esta escuela.
Los alumnos de esta división.
Los alumnos de esta escuela que se llaman Juan.

En cada renglón hemos definido un conjunto, diciendo cuáles son sus elementos.

Como vemos es muy fácil inventar conjuntos. Agregando o quitando elementos a un conjunto obtenemos nuevos conjuntos, que vamos a comparar con los que teníamos. Es indispensable entonces darle un nombre corto a cada conjunto, porque no puede ser que estemos repitiendo diez veces la frase "el conjunto formado por el pastor de tal rebaño y las ovejas con cría".

Lo más económico y conveniente es usar letras como nombre de los conjuntos. Por costumbre se usan letras mayúsculas.

Así " B " podría ser el nombre del conjunto formado por todos los bancos de esta aula. También podríamos llamarlo " L " o de cualquier otra forma, con tal de no elegir un símbolo que ya estemos usando para otro conjunto, pues entonces nos confundiríamos .

A cada elemento de " B " , o sea a cada banco de esta aula, vamos a ponerle como nombre también una letra, si es que no tienen ya un nombre corto. Para elementos trataremos de usar letras minúsculas, como a , b , k , x . Si b es el nombre de un banco de esta aula, entonces b es miembro de B .

Pero atención: el asiento de b no es miembro de B . Los elementos de B son bancos enteros, no partes de bancos.

Es importante no confundirse en esto. Un banco es un conjunto de piezas : asiento, pupitre, patas; al mismo tiempo ese banco es elemento de otro conjunto, B /. Pero los elementos de un banco b no son elementos de B .

Esta división es un conjunto de alumnos; llamémosla D . A su vez la escuela es el conjunto de todas las divisiones de la misma.

Un conjunto puede ser elemento de otro conjunto.

Pero si el alumno Juan Pérez es miembro de D, eso no significa que sea miembro del conjunto de divisiones. Los miembros de éste son divisiones, no alumnos.

Las bibliotecas de esta ciudad forman un conjunto C. Cada elemento de C es una biblioteca, y por lo tanto es un conjunto de libros. Pero ninguno de esos libros es miembro de C.

Muchas veces un elemento puede tener varios nombres o símbolos: así tal vez a Juancito Pérez le dicen también "el Gordo", y nosotros lo simbolizamos con la letra "g"; el número 10 se representa también por $3+7$, o por $2\times6-2$, o por $40/4$, etc. Esto no molesta mucho; lo que puede causar graves confusiones es que dos cosas distintas tengan el mismo nombre; eso, tanto en Matemática como en la vida real.

Si dos nombres de elementos representan en realidad el mismo elemento, decimos que son iguales y usamos para indicar eso el símbolo =.

Así: Juan Pérez = el Gordo = g.
$10 = 3+7 = 2\times6-2 = 40/4$.

A veces las letras del alfabeto no alcanzan para representar todos los elementos de un conjunto, o todos los conjuntos que debemos estudiar a la vez. Así si los bancos de B son 30, necesitamos otros símbolos además de las letras $a, b, \ldots, z$. Muchas veces se usan letras de otros alfabetos; especialmente las griegas: alfa, beta, gama, delta, etc.

Muy práctico es usar las mismas letras con algunas marcas adicionales. Así la "prima" nos convierte a cada letra en otro símbolo: b', A', x' se leen "b prima", "A prima", "x prima". La prima repetida: b'', A'', x'', que se leen "b segunda", "A segunda", "x segunda". La raya arriba: $\bar{b}$, $\bar{A}$, $\bar{x}$, que se leen "b raya", "A raya", "x raya", o abajo: $\underline{b}$, $\underline{A}$, $\underline{x}$.

Más cómodo todavía es usar "subíndices": números o letras más pequeños escritos al pie del símbolo principal: b_3, A_n, x_{147}, que se leen: "b sub tres", "A sub n", "x sub ciento cuarenta y siete".

Entonces los 30 bancos de B podrían simbolizarse: $a, b, c, \ldots, z, a', b'$, o también $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_{30}$ que es mucho más claro. Los símbolos los elige uno como le parece más cómodo. El uso de letras griegas, subíndices, etc., no es para hacer las cosas más misteriosas o difíciles, sino simplemente por ahorro de tiempo y ganancia en claridad.

Cuando simbolizamos un conjunto por medio de una letra, en algún lugar tenemos que decirlo: "la letra B representará el conjunto formado por todos los bancos de esta aula".

Como frases de esta clase se repetirán muchas veces, conviene abreviarlas usando un símbolo especial : las llaves. Encerrando la descripción de un conjunto entre llaves nos ahorraremos la frase "el conjunto formado por". Así :

{los bancos de esta aula}

significa: "el conjunto formado por los bancos de esta aula".

{3 , 17 , 150}

significa: "el conjunto formado por los números 3 , 17 y 150 .

{Mis libros}

significa: " el conjunto formado por mis libros".

Para decir que una letra simboliza tal conjunto, o sea que es un nombre de ese conjunto, usaremos el signo igual, puesto entre el conjunto y su símbolo. Así:

B = {los bancos de esta aula}

es la forma abreviada de decir que la letra B representará a ese conjunto.

Con la letra $\underline{N}$ subrayada representaremos siempre al conjunto de todos los números naturales , o sea 1, 2, 3, ... donde los puntos suspensivos indican que falta nombrar los infinitos otros. Así:

$\underline{N}$ = {números naturales}

$\underline{N}$ = {1, 2, 3, 4, 5, ...}

Este conjunto es el más importante de todos en Matemática. No debemos olvidarnos que su nombre es $\underline{N}$.

Ejercicios

Simbolizar con letras los siguientes conjuntos y sus elementos:

1) Los alumnos de esta división.
2) Los jugadores del equipo de fútbol campeón.
3) Los automóviles de esta ciudad.
4) Los granos de arena de esta playa.
5) Las personas que viven en la calle Tal nº 123.
6) Los números naturales menores que 100.
7) Los ríos de este país.
8) Las clases de vertebrados.
9) Los equipos de fútbol que intervienen en el campeonato.
10) Dar cinco ejemplos de conjuntos cuyos elementos son a su vez también conjuntos.

Pertenecer

Si B = {los bancos de esta aula} y b es el nombre de un banco de esta aula, entonces b es miembro o elemento de B .

Se dice también que b pertenece a B , o que está en B .

Todas estas maneras equivalentes de decir se abrevian con el símbolo $\in$. Este símbolo se usará siempre en vez de las frases: "es miembro del conjunto", o "es elemento del conjunto", o "pertenece al conjunto", o "está en el conjunto".

Así, si Federal es un equipo de fútbol y Bossio es uno de sus jugadores, escribiremos

$$\text{Bossio} \in \text{Federal}$$

y eso se lee: "Bossio es miembro del conjunto Federal".

Cuando los conjuntos y los elementos están representados por letras, la notación es aún más breve:

$$b \in B$$

significa: "el banco cuyo nombre es b es uno de los elementos del conjunto de bancos B ".

Entonces puede escribirse:

$16 \in \underline{N}$

Juan Pérez $\in$ {familia Pérez}

pastor $\in$ {rebaño y su pastor}

Para indicar que un objeto no es un elemento de un conjunto, usaremos el mismo símbolo cruzado por una raya: Así:

$$\text{Gualco} \notin \text{Federal}$$

se lee: "Gualco no pertenece a Federal", o "no es miembro del equipo Federal".

$\frac{2}{3} \notin \underline{N}$

Juan González $\notin$ {familia Pérez}

pastor $\notin$ {rebaño}

A la derecha de los símbolos, $\in$ o $\notin$ tiene que estar el nombre de un conjunto, y a la izquierda el nombre de uno de sus posibles elementos.

Escribir, usando los símbolos correspondientes, si los objetos "Río Grande" y "36" pertenecen o no pertenecen a cada uno de los conjuntos definidos en el parágrafo anterior.

Formas de definir conjuntos

Dar un conjunto, o definir un conjunto, significa decir cuáles son sus elementos. Un conjunto está bien definido, o determinado, si sabemos exactamente cuáles objetos pertenecen a él, y por lo tanto también sabemos cuáles no pertenecen a él.

Conjuntos definidos por propiedades

Los libros de historia forman un conjunto; los caballos negros forman otro; los números primos otro más. Cualquier propiedad que se nos ocurra, determina un conjunto: el de todos los objetos que tienen esa propiedad.

Así, para saber si un objeto pertenece al conjunto {libros de Historia} hay que ver si tiene la propiedad de ser un libro de Historia.

Por lo tanto todos los adjetivos determinan conjuntos, en principio: rojo, grande, lento, pobre, etc. definen los conjuntos de todos los objetos rojos, grandes lentos, pobres. Pertenecer al conjunto de los caballos negros es lo mismo que tener la propiedad de ser un caballo negro.

En la práctica puede aparecer una dificultad, y es que algunas de estas propiedades son un poco relativas, y no todo el mundo, o no siempre, se las aplica a los mismos objetos.

Seguramente no todos estarán de acuerdo en decir si tal señor es pobre o no. Comparada con un microbio, una silla es un objeto enorme, pero comparada con una estrella es insignificante: entonces, ¿la silla es grande o no ? Un caballo que tenga casi todo el pelo negro, pero con algunas manchitas blancas, ¿es negro o no ? La historia de la vida de un gran músico, ¿es un libro de Historia o no ?. Con los números primos no tenemos ninguna duda posible: estos conjuntos matemáticos están definidos con toda precisión.

De todas maneras, y aunque haya estas dificultades, las propiedades son una manera muy útil de definir conjuntos. Pero tendremos que suponer que esas propiedades están claramente definidas : que sabemos cuáles objetos las poseen y cuáles no.

Como ya hemos dicho, el conjunto de todos los objetos que tienen una propiedad, se simboliza escribiendo esa propiedad entre llaves:

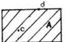
{los hombres ricos}
{las piedras preciosas}
{los mamíferos}
{los triángulos equiláteros}
{los números naturales que son divisores exactos de 12}

Por otra parte es posible pensar que cualquier conjunto define una propiedad. Si A es un conjunto, hay objetos que tienen la propiedad de pertenecer a A ; son justamente los elementos de A . Aunque no sea muy útil, nadie nos impide decir que el conjunto A está formado por aquellos objetos que tienen la propiedad de pertenecer a A . Esto no nos dice nada nuevo, pero nos permite pensar que la idea de propiedad está inevitablemente ligada a la de conjunto.

Conjuntos de puntos

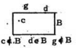
Conjuntos que usaremos mucho son los conjuntos geométricos formados por puntos del espacio, del pizarrón o del papel. Cada figura, cada cuerpo geométrico es un conjunto de puntos. Este rectángulo A es un conjunto; sus elementos son todos los puntos que están en la zona rayada. En realidad hay que aclarar si incluimos o

$d \in A \quad c \in A \quad f \notin A$

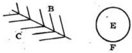


no los puntos del borde o frontera de la figura. Cuando no digamos nada es que los incluimos.

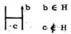
También puede ser que no nos interesen los puntos de adentro y el conjunto sea solamente el borde:



Una recta es un conjunto de puntos; y cada uno de los dos semiplanos que ella limita es otro ; un círculo también, y la circunferencia que lo limita es otro.

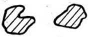


Esta página es un conjunto de puntos. Cada letra impresa en ella es también un conjunto de puntos pues es una figura.



No hace falta que sean figuras con nombre. Aquí tenemos un conjunto geométrico: el formado por todos los puntos que están en la región rayada.

Aquí tenemos otros dos conjuntos de puntos ; pero también podemos pensar que los puntos de ambos forman entre todos un solo conjunto, separado en dos partes.



Una figura no tiene por qué tener todos sus puntos conectados entre sí ; puede estar formada por dos o más partes separadas. Una palabra impresa en esta página es también un conjunto de puntos , aunque esté formada por varias letras separadas. La letra i es un solo conjunto, aunque está formada por dos partes, cada una de las cuales también es un conjunto.

Estos conjuntos geométricos de puntos se usan tanto que es frecuente decir "punto" en vez de "elemento" o "miembro" de un conjunto cualquiera, aunque no sea geométrico. Así se puede decir que el banco b es un "punto" o elemento del conjunto B .

Conjuntos dados por enumeración

Otra manera frecuente de dar conjuntos es enumerar todos sus elementos. Así, con San Martín, Bolívar y Washington, formo un conjunto que indico así:

{San Martín, Bolívar, Washington}

o sea encerrando entre llaves los nombres de sus elementos, separados entre sí por comas.

De este modo no hay ninguna duda sobre cuáles son los elementos del conjunto: ahí están todos a la vista.

Se dice entonces que el conjunto está definido por enumeración o extensión.

$\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

es un conjunto de números, dado por enumeración de sus elementos. Nótese que estos elementos son los mismos que los del conjunto definido antes por la propiedad de ser todos los divisores de 12 .

Es claro que el método de enumeración no sirve cuando el conjunto tiene infinitos elementos, pero algunas veces pueden usarse en estos casos los puntos suspensivos, siempre que quede claro su significado. Así el conjunto

$$\{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

es el de los números naturales, dado por extensión o enumeración;

$$\{2, 4, 6, 8, \dots\}$$

es el de los números pares.

$$\{2, 4, 8, 16, \dots\}$$

es un poco más difícil de interpretar, pero se ve que está formado por las potencias de 2 : $2^1, 2^2, 2^3, 2^4, \dots$

Aunque el conjunto sea finito, si tiene muchos elementos este método no es muy cómodo. Podemos definir por extensión el conjunto de las personas que tienen teléfono en esta ciudad, y así está hecho en la guía de teléfonos, pero es bastante trabajo confeccionarla.

Sin embargo a veces el método de la enumeración es indispensable, para evitar imprecisiones que hemos visto que tiene el dar conjuntos por propiedades.

Por ejemplo parece fácil definir el conjunto de las personas que pueden votar en este país, en este año, pero no es así porque hay muchos motivos legales que impiden que algunas personas mayores puedan votar. La única forma clara de definir este conjunto tan importante, es enumerar una por una todas las personas que pueden votar. De este modo ya no puede haber discusión: una persona puede votar si y solo si está en la lista.

Es fácil también hablar del conjunto {números primos menores que 1000}, pero ¿cuáles son? Es conveniente entonces dar una tabla o lista de todos esos números, o sea dar el conjunto por extensión. Una ventaja de este método es que así podemos formar conjuntos muy arbitrarios, como:

{el Atlántico, mi abuelita, 17, este lápiz}.

Estos cuatro objetos forman un conjunto tan admisible como cualquier otro, aunque parezca un poco raro. ¿Qué tiene de raro? Que no hay ninguna relación aparente entre sus elementos; no se ve por qué se los ha puesto juntos en un conjunto.

Pues bien, eso no nos debe importar. Cuando alguien forma un conjunto, algún motivo tendrá, probablemente; pero cuál es ese motivo no nos interesa; nos debe bastar con saber cuáles son los elementos del conjunto.

Cuando, además, "tomamos en cuenta las relaciones, los vínculos que hay entre esos elementos," diremos que el conjunto tiene estructura.

Los miembros de una orquesta forman un conjunto, pero además este conjunto tiene una estructura muy complicada de funcionamiento que le hace ser orquesta y no un conjunto cualquiera de individuos. Los bancos de esta aula tienen también una estructura, pues están ordenados por filas y columnas.

Los alumnos de esta división forman un conjunto sin estructura evidente, pero si los ordenamos alfabéticamente, o los agrupamos por amistad, por gustos, por capacidad, le damos al conjunto una estructura. Los números, además de formar un conjunto, se pueden sumar, multiplicar, ordenar, etc. Ese conjunto tiene una estructura muy complicada.

Pero por ahora no prestaremos atención a las posibles estructuras de nuestros conjuntos.

Conjuntos dados por fórmulas

Muchas propiedades matemáticas se expresan por fórmulas, para lograr brevedad y claridad, de modo que las fórmulas nos permitirán también definir conjuntos.

Así, los números naturales cuyo cuadrado es menor que 60, forman un conjunto, que llamaremos C .

$3 \in C$, pues $3^2 = 9 < 60$. ($<$ significa "menor que")

$9 \notin C$, pues $9^2 = 81$ y es falso que $81 < 60$

Escribamos entonces la fórmula

$x^2 < 60$

donde indicamos con la letra x que en ese lugar probaremos poner diferentes números.

Si al remplazar la x por un número n es cierto que $n^2 < 60$, entonces $n \in C$. Si es falso que $n^2 < 60$ entonces $n \notin C$.

Por costumbre, este conjunto se simboliza también entre llaves, de la siguiente manera:

$\{x \mid x^2 < 60\}$

que se lee: "el conjunto formado por aquellos números que escritos en vez de la x dan un resultado verdadero".

La x se escribe aparte a la izquierda, separada por una raya vertical, para indicar que ella es la letra que hay que remplazar por números. A esa letra se la llama variable; sirve para marcar los lugares de una fórmula donde hay que poner números para ver qué pasa.

Las últimas letras del alfabeto, x, y, z, se usan frecuentemente como símbolos de variables.

$\{y \mid 18 - y > 12 + y\}$ (> significa "mayor que").
es el conjunto de aquellos números que escritos en vez de la variable "y" (en todos los lugares de la fórmula en que aparece) hacen cierta la desigualdad. O sea son los números que restados de 18 dan un resultado mayor que sumándolos a 12. Los únicos elementos de este cónjunto son 1 y 2 .

Las variables pueden usarse aunque no se escriban fórmulas . Así

$\{z \mid z$ es múltiplo de $6\}$

es el conjunto de los múltiplos de 6 . Un número pertenece a este conjunto si escrito en lugar de la z da una proposición verdadera. 9 no pertenece a él, porque " 9 es múltiplo de 6 " es falso.

Ejercicios

Leer los siguientes conjuntos y decir cuáles son sus elementos.

11) $\{x \mid x \in \underline{N}$ y $x > 3\}$; $\{x \mid x \in \underline{N}$ y $x \geqslant 2\}$;
$\{z \mid z \in \underline{N}$ y $z \times 4 < 20\}$.

12) $\{x \mid x$ es hermano de Juan Pérez$\}$;
$\{x \mid x$ es la capital de algún país$\}$.

13) $\{y \mid y = y\}$;
$\{y \mid y$ es hijo del padre de $y\}$.

14) $\{x \mid x$ es mamífero ó x es un árbol$\}$;
$\{x \mid x$ es mamífero ó x no es mamífero$\}$;
$\{x \mid x \in A\}$, siendo A un conjunto dado.

Expresar con una variable los siguientes conjuntos.

15) {números naturales que divididos por 3 dan un resultado menor que 10} .

16) {números naturales que al multiplicarlos por 4 y sumar luego 2 dan un resultado que es divisor exacto de 30} .

Conjuntos dados por diagramas de flujo.

Conocer un conjunto significa, hemos dicho, saber decir ante cualquier objeto si pertenece o no al conjunto. En cada caso necesitamos pues, ciertas reglas o instrucciones para averiguar esto.

Así si el conjunto es {libros de Historia} las instrucciones podrían ser: tomar el objeto, ver si es un libro (si está formado por páginas escritas, etc.) y leerlo para ver si trata de Historia o no . Si el conjunto es una figura del pizarrón, las instrucciones son: ver si el objeto es un punto del pizarrón o no, y si lo es, ver si está en la figura o no.

Si el conjunto está dado por enumeración: { Juan, 17, esta piedra } las instrucciones son: tomar el objeto, ver si es Juan o no ; si no, ver si es 17 o no; si no, ver si es esta piedra o no.

Para fórmulas matemáticas, las instrucciones son las necesarias para verificar si el objeto es un número que satisface la fórmula o no.

A veces las instrucciones son bastante numerosas o complicadas, y conviene expresarlas de manera bien clara para no confundirse. Para eso se usan los diagramas de flujo, en los cuales encerramos en un recuadro cada instrucción por separado, e indicamos con flechas el orden en que deben cumplirse. Y muy importante: como en muchos casos hay que averiguar si el objeto tiene o no cierta propiedad, y hay que hacer cosas distintas según la respuesta, escribimos también cada pregunta en un globo, con dos flechas que salen de él, para las dos respuestas posibles.

Ejemplo Quiero definir el conjunto L de los libros que compro si entro a una librería dispuesto a gastar hasta \$1. 000 (o digamos entre 950 y 1. 000 pues sería raro gastar exactamente 1. 000). El diagrama siguiente es la descripción de lo que hago para elegir los libros que formarán el conjunto L . Supongo que no compraré libros que cuesten más de \$300, pero compraré cualquier libro que me guste y cueste menos que eso, con tal que me alcance el dinero (los \$1. 000 menos lo gastado en otros libros).

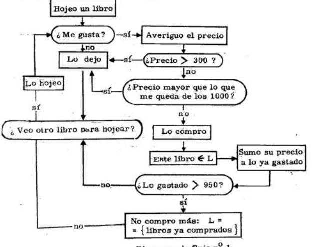


Diagrama de flujo n° 1

Las instrucciones y conclusiones están encerradas en rectángulos; de las instrucciones sale una sola flecha, que lleva al paso siguiente; de la conclusión no sale ninguna flecha: allí termina el diagrama. Hay una instrucción a la cual no llega ninguna flecha: allí empieza el diagrama. Las preguntas están encerradas en globos . De ellos salen dos flechas porque hay dos respuestas posibles: sí y no. La flecha marcada sí nos dice qué hay que hacer si la respuesta es sí, y análogamente para no .

Hay varios lazos o ciclos: flechas que vuelven a un paso anterior. Es una manera muy ingeniosa y cómoda de indicar que cierta situación se repite. Así con cada libro que hojeo, vuelvo a preguntar si me gusta, etc.

Otro ejemplo. Las instrucciones para saber si un objeto pertenece al conjunto $C = \{$ múltiplos de $3\}$ son las siguientes:

1) Si el objeto no es número natural, no está en C .
2) Si es un número natural, sumar sus cifras.
3) Si la suma de sus cifras es múltiplo de 3 , el número está en C, y si no, no.

Pero ¿cómo hacemos para averiguar si la suma de sus cifras es múltiplo de 3 ? Mientras sea un número pequeño, menor que 20 ó 30, eso es fácil porque sabemos si son o no múltiplos de 3 con solo mirarlos. Si la suma es un número grande, podemos aplicarle las mismas instrucciones anteriores: sumamos sus cifras y vemos si esta suma es múltiplo de 3. Y si todavía esta suma es un número muy grande, sumamos sus cifras y vemos qué pasa con esta nueva suma.

Como cada suma es más pequeña que la anterior, llegaremos alguna vez a una tan pequeña, que conoceremos si es o no múltiplo de 3. (Si un número tiene mil cifras, o sea que apenas cabe en esta página, la suma de sus cifras no puede ser mayor que $9 \times 1000 = 9000$ - si todas fueran nueves- y la suma de las cifras de esta suma ya es menor que $9 \times 4 = 36$; en cada paso la reducción es muy grande).

Estas instrucciones no son muy difíciles, pero conviene ponerlas en forma de diagrama.

Queremos averiguar si el objeto z pertenece o no a C . Entonces:

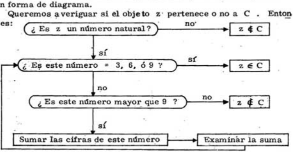


Diagrama de flujo nº 2

Las instrucciones y conclusiones están como siempre encerradas en rectángulos, y las preguntas en globos. De los globos salen 2 flechas. De los rectángulos, una sola, o ninguna si es una conclusión.

Para entender más rápido este diagrama, conviene verlo con un ejemplo, $z = 975$.

La primera pregunta es clara: si la respuesta es no, se sale por la flecha marcada no, que nos lleva a la conclusión $z \notin C$ (· pues no es un número natural).

Si la respuesta es sí, salimos por la flecha sí, que nos ordena preguntar si $z = 3$ $z = 6$, ó $z = 9$, pues para números menores que 10 supondremos que sabemos ya si son o no múltiplos de 3.

Si la respuesta a esta pregunta es sí, salimos por la flecha sí que nos lleva a la conclusión $z \in C$, como es lógico. (Sabemos que esto es una conclusión porque de ese cuadro no sale ninguna flecha).

Si la respuesta es no, salimos por no, que nos ordena preguntar si z es mayor que 9.

Si la respuesta es no, la conclusión es $z \notin C$, pues si z no es mayor que 9, y no era ni 3 ni 6 ni 9, sólo puede ser 1, 2, 4, 5, 7, u 8, y entonces no es múltiplo de 3.

Si la respuesta es sí, entonces z tiene dos cifras o más, y la flecha sí nos lleva a la instrucción de sumar esas cifras y luego examinar ese nuevo número.

Ahora se hace algo muy ingenioso: la flecha que sale de esta instrucción vuelve a un cuadro anterior (eso se llama lazo o ciclo), que nos hace repetir todo con la suma en vez de z, y el ciclo se repite automáticamente todas las veces que haga falta, hasta que la última suma es menor que 10, y entonces se sale del ciclo por alguna de las dos flechas de la derecha. Para eso hemos escrito "es este número igual a 3, 6, ó 9? " y no " es z igual a 3, 6, ó 9 ? ", pues la primera vez hacemos la pregunta sobre z, pero después la hacemos refiriéndonos a la suma de las cifras del número considerado en el ciclo anterior.

Lo que queremos decir entonces es que fijamos un lugar en el cual pondremos primero a z, luego a la suma de sus cifras, etc. La pregunta se refiere al número que ocupa ese lugar en ese momento. Estamos pues usando una variable, y podríamos escribirla para que se vea. Llamémosla x. x es entonces cualquier cosa que esté en cierto lugar fijo. Para indicar que ponemos algo en ese lugar usaremos el símbolo ":= ". Así $x := 4$ significa que ponemos al número 4 en el lugar que corresponde a x.

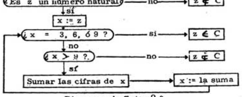


Diagrama de flujo n° 3

El cuadro x := z significa que ponemos z , o sea 975, en el lugar de x . La pregunta siguiente, entonces , que dice "lo que está en x , ¿es 3, 6, ó 9? " significa:"¿975 es 3, 6 ó 9?" . No. La siguiente es: "¿975 es mayor que 9?" . Sí. Sumamos las cifras de x o sea de 975; eso da 21. Ahora " x := la suma" significa que en x , donde hasta ahora estaba 975, ponemos 21 y preguntamos "¿es 21 = = 3, 6, ó 9? " etc.

Este diagrama dice lo mismo que el anterior pero con un poco más de precisión.

Nótese que con este diagrama no se demuestra que las instrucciones para hallar los múltiplos de 3 son correctas. El diagrama solo sirve para enunciar claramente la regla. Si el conjunto obtenido es realmente el de los múltiplos de 3 es otra cuestión.

Otro ejemplo: el diagrama para averiguar si un número r es primo sería (siendo P = { números primos }) :

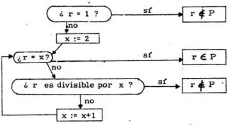


Diagrama de flujo n° 4

Probremos con r = 9 . ¿ 9 = 1 ? No. Pongamos un 2 en el lugar x . "¿r = x ?" significa ahora: "¿9 = 2? " . No. "¿9 es divisible por 2 ?" No. Ahora en el lugar de x ponemos lo que estaba en x (o sea 2) más 1 : sumamos 1 al número que estaba en x . Nos queda un 3. Volvemos a "¿r = x ?" , pero ahora significa "¿9 = 3?" . No. "¿9 es divisible por 3?". Sí, y entonces 9 no es primo. Al escribir x:=x+1 estamos ordenando sumar 1 a lo que estaba en x y llamarlo x .

Si la pregunta "¿r es divisible por x? " parece muy difícil, hay que remplazarla por un diagrama que explique cómo se averigua eso.

Ejercicio

17) Verificar que el siguiente diagrama sirve para averiguar si un número natural r es divisible por otro n .

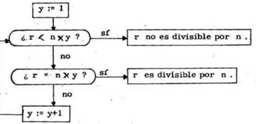


Diagrama de flujo N^o 5

18) Reproducir el diagrama de la compra de libros, usando variables.

19) Transformar ese mismo diagrama, agregando la condición de no hojear más de 50 libros.

Conjuntos iguales

En definitiva, ¿qué es un conjunto? Hasta ahora no hemos dado una definición formal de conjunto, que nos diga exacta y rigurosamente qué es eso. Ensayemos: conjunto es... un grupo de cosas ... un montón de elementos... una colección de objetos... Pero ¿qué es una "colección", o un "montón", o un "grupo" ?

Si queremos explicar estos términos solo conseguiremos usar otros parecidos o armar un embrollo que nos dejará más confusos que al comienzo.

Podemos en cambio decir "todo el mundo sabe qué es una colección o un montón", pero también sabe todo el mundo qué es un conjunto, y así hemos comenzado el capítulo.

No vale la pena tratar de aclarar el significado de la palabra "conjunto" usando otras palabras que no son más claras. Por eso no vamos a perder tiempo buscando una definición de "conjunto", "elemento" o "pertenece". Éstos serán para nosotros conceptos primarios, que no necesitan aclaración.

Dar un conjunto es: decir cuáles son sus elementos.

Un conjunto está bien dado, o definido, o determinado, si sabemos averiguar, para cada posible objeto, si pertenece o no a él.

Lo importante al hablar de un conjunto es, pues, saber cuáles son sus elementos.

Con ese criterio definimos igualdad de conjuntos. Dos conjuntos merecerán ser llamados "iguales" si y solo si tienen los mis -

mos elementos, o sea si son el mismo conjunto.

Así los conjuntos $\{$divisores de 12$\}$ y $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ son iguales porque sus elementos son los mismos.

¿Cómo sabemos que tienen los mismos elementos? Porque todo elemento del primero, o sea todo divisor de 12, está en el segundo, y todo elemento del segundo es divisor de 12.

Para indicar que dos conjuntos son iguales usamos el símbolo =. Si A y B son dos conjuntos, entonces A = B significa:

1º: todo elemento de A es elemento de B , y
2º: todo elemento de B es elemento de A .

Esto se dice también así: si $a \in A$, entonces $a \in B$, y si $b \in B$ entonces $b \in A$, siendo a y b nombres de objetos cualesquiera.

Para abreviar introduciremos el símbolo $\Longrightarrow$ en vez de las palabras "si ... entonces"; es decir, la frase $a \in A \Longrightarrow a \in B$, se lee: "si $a \in A$ entonces $a \in B$", o lo que es lo mismo, "$a \in A$ implica $a \in B$".

La definición de igualdad se escribe ahora:

A = B si y solo si:

1º: $a \in A \Longrightarrow a \in B$, y además
2º: $c \in B \Longrightarrow c \in A$

donde a y c son objetos cualesquiera.

Nótese que también podemos demostrar que dos conjuntos son iguales si los elementos que no pertenecen a ellos son los mismos.

$\{$mamíferos con alas$\}$ = $\{$murciélagos$\}$

porque si un animal no es un mamífero alado no puede ser murciélago, y si no es murciélago no puede ser mamífero con alas.

Entonces, A = B si y solo si:

1º: $a \notin A \Longrightarrow a \notin B$, y además
2º: $b \notin B \Longrightarrow b \notin A$.

Dos conjuntos son diferentes cuando no son iguales.

El símbolo de la palabra "diferente" es el igual cruzado con una raya oblicua: $\neq$ . .

¿ Qué significa entonces $A \neq B$?

$A \neq B$ si y solo si: hay algún elemento de A que no está en B, o hay algún elemento de B que no está en A (o las dos cosas).

Puede haber muchos de A que no son de B y muchos de B que no son de A , pero para demostrar que A y B son distintos basta con mostrar un solo ejemplo.

En símbolos: $A \neq B$ si y solo si:

existe un objeto x tal que: $x \in B$ y $x \notin A$,
o existe un objeto x tal que: $x \in A$ y $x \notin B$.

La conjunción "o" la entenderemos siempre como que sucede una cosa o la otra o las dos. "Quiero helados o caramelos" significa : "quiero helados o caramelos o las dos cosas".

Ejercicios.

Demostrar:

20) {triángulos equiláteros} = {triángulos equiángulos}.
21) {enteros de dos cifras} ≠ {enteros mayores que 9}.
22) {planetas más chicos que la Tierra} ≠ {planetas sin lunas}
23) {poliedros regulares} ≠ {tetraedro, cubo, dodecaedro, icosaedro}.
24) {números primos pares} = {2}.
25) {libros de matemática} ≠ {libros aburridos}.

El conjunto vacío.

Por lo común la palabra "conjunto" evoca la idea de varios elementos. Pero cuando damos un conjunto por una propiedad, sin saber cuántos objetos la poseen, puede ocurrir que haya varios, uno solo, o ninguno. Por eso conviene usar también la palabra "conjunto" aunque haya un solo elemento, o incluso si no hay ninguno.

Así puedo definir el conjunto {los alumnos de esta división que se llaman Juan}, y tal vez haya uno solo o ninguno.

Si el único es Juan Pérez, entonces el conjunto anterior es igual al conjunto {Juan Pérez}, pues tienen los mismos elementos. Nótese que:

$$\text{Juan Pérez} \in \{\text{Juan Pérez}\}.$$

Si no hay ninguno, tenemos un conjunto vacío: ningún elemento pertenece a él.

El conjunto de los burros con alas es también vacío.

{números primos múltiplos de 10} es vacío.

{océanos de agua dulce} es vacío.

$\{x \mid x \in \underline{N} \text{ y } 5+x < 2\}$ es vacío.

Demostraremos ahora que todos los conjuntos vacíos son iguales. Supongamos que A y B son dos conjuntos vacíos; por ejemplo, los dos primeros que hemos mencionado.

Repasemos la definición de A = B. "Todo elemento de A está en B, etc.". Pero en A no hay ningún elemento. ¿Cómo debemos interpretar esto?

Probemos de la otra forma que mencionamos: A = B si y solo si los elementos que no están en A son los mismos que no están en B.

Pero esto es cierto cuando A y B son vacíos, pues entonces los objetos que no pertenecen a ellos son todos. Entonces A = B.

En vista de que todos los conjuntos vacíos son el mismo, vale la pena darles un símbolo para siempre: es $\emptyset$.

Entonces $a \in \emptyset$ es falso, cualquiera sea el objeto a.

Siempre es cierto que $a \notin \emptyset$.

Conviene también ponerle nombre al conjunto formado por todos los objetos que vamos a usar en este libro como elementos de conjuntos. Se lo llama el conjunto universal y su símbolo será I. Si c es un objeto mencionado en este libro, entonces $c \in I$.

Dar 3 propiedades que definan conjuntos vacíos, y 3 que definan conjuntos de un solo elemento.

Elementos repetidos

Al enumerar los elementos de un conjunto, un elemento no debe repetirse. Los conjuntos

A = { Juan, 17, ese tranvía },
B = { Juan, 17, Juan, ese tranvía },

son iguales, pues tienen los mismos elementos. El segundo Juan de B está demás, pues con escribirlo una vez ya está dicho que es elemento de B.

Claro que si la palabra "Juan" no se refiere en B las dos veces a la misma persona, o si se trata del mismo Juan pero en dos oportunidades distintas que interesa diferenciar (por ejemplo antes y después de dar examen), entonces está bien escribirlo dos veces, pues se trata en realidad de elementos diferentes. En ese caso es necesario completar los nombres de los elementos para que se vea que son diferentes: por ejemplo Juan-a y Juan-b. Hay que tener entonces claro lo que se quiere al definir un conjunto. Así si me interesa el conjunto de los factores primos de 24, ¿cuáles son sus elementos?

$$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \quad .$$

Los factores primos de 24 son 2 y 3, pero el 2 está tres veces. ¿Debo poner $\{2,3\}$ ó $\{2,2,2,3\}$?

Si estoy buscando factores primos para resolver un problema de mínimo común múltiplo, no me alcanza con $\{2,3\}$. Debo indicar que el 2 está 3 veces. Pero hemos dicho que $\{2,2,2,3\} = \{2,3\}$.

La solución es como en el caso de Juan en dos oportunidades: hay que poner los tres 2 pero con marcas que los distingan. Por ejemplo:

{ primer 2 , segundo 2 , tercer 2 , 3 }.

Este conjunto tiene 4 elementos diferentes.

Capítulo III

PARTES DE UN CONJUNTO

La inclusión

Sea A el conjunto de los actuales habitantes de este país; sus elementos son personas.

Vamos a considerar este otro:

$N = \{$ miembros de A que tienen menos de 110 años $\}$.

Todos los elementos de N son elementos de A, no hay duda. Probablemente haya en este país habitantes de 110 años o más, y en ese caso A tiene más elementos que N ; pero podría ocurrir que todos los habitantes fueran menores de 110 años, y entonces sería $N = A$

Pero en ambos casos es cierto que todo elemento de N es elemento de A . En símbolos:

$r \in N \implies r \in A$

Cuando esto ocurre se dice que

el conjunto N es parte del conjunto A ,

o que

N es subconjunto de A ,

o que

N está incluido o contenido en A ,

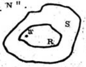
o que

A incluye o contiene a N .

Todas estas frases significan lo mismo y se abrevian con el símbolo $\subset$, una U acostada, con la boca apuntando hacia el conjunto que incluye. Así:

$$N \subset A \quad y \quad A \supset N$$

se leen: "N es parte de A" y "A incluye a N".



Un conjunto R se dice que es parte de un conjunto S si y solo si cada elemento de R es también elemento de S .

En símbolos:

$R \subset S$ si y solo si $a \in R \implies a \in S$.

En el gráfico se ve claramente el significado de estar incluido.

Una consecuencia de esta definición es que si dos conjuntos son iguales, cada uno de ellos es parte del otro (repasar la definición de igualdad de conjuntos). En otras palabras, todo conjunto es parte de sí mismo.

Para cualquier conjunto T es cierto que $T \subset T$.

Esto tal vez no coincide exactamente con el uso común de la palabra "parte": si digo "voy a pintar parte de esta pared", en general no quiero decir que la voy a pintar toda. Pero eso no es muy grave, y en Matemática es más cómodo decir también que A es parte de B cuando $A = B$.

Cuando A es parte de B y no es todo B , diremos que A es parte propia de B .

Así si:

$A = \{$habitantes de este país$\}$
y $M = \{$miembros de A que tienen menos de 5 años$\}$,
es seguro que $M \neq A$, y como $M \subset A$, resulta que M es parte propia de A . Esto lo simbolizaremos así:

$M \subsetneqq A$ o $A \supsetneqq M$

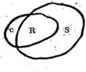
(siempre la boca de la U hacia el conjunto que incluye).

Se dice también que M está incluido propiamente en A .

Otra manera de definir $R \subset S$ es por los elementos que no están en S en vez de los que están en R :

$R \subset S$ si y solo si los objetos que no están en S tampoco están en R : $\quad a \notin S \implies a \notin R$.

Por último, cuando un conjunto R no está incluido en otro S tiene que ser porque existe algún elemento de R que no está en S (uno o más).



La negación de la inclusión se simboliza " $\not\subset$ ".

$R \not\subset S$ significa: " R no está incluido en S ". O sea:

existe algún elemento c tal que $c \in R$ y $c \notin S$.

Ejercicios y ejemplos

Si los conjuntos están dados gráficamente, como figuras en el papel, es fácil ver si uno está incluido en otro: la figura incluida tiene que estar dentro de la otra.

$A \not\subset C$ $\qquad$ $A \subset B$

$C \subsetneqq A$ $\qquad$ $C \supset A$ $\qquad$ $A \not\subset B$ $\quad$ $B \not\subset A$ $\qquad$ $B \subset A$

Si A y B están dados por enumeración de sus elementos, también es muy fácil comprobar si $A \subset B$: se toma uno por uno cada elemento de A y se ve si figura entre los de B o no.

$\{7 ; 16 , 4 , 2 ; 9\} \subset \{18 , 16 , 45 , 9 , 4 , 7 , 8 , 2 , 1\}$.

$\{$ Juan, Pedro, Diego $\} \supset \{$ Diego, Pedro $\}$.
$\{$ Juan, Diego $\} \not\subset \{$ Juan, Pedro, Julio $\}$.

¿Son propias las inclusiones dadas?

Cuando los conjuntos A y B están dados por propiedades, y $A \subset B$, se dice que la propiedad A implica la propiedad B. En estos casos no siempre es fácil demostrar que hay o no hay inclusión.

$\{$ argentinos $\} \subset \{$ americanos $\}$.
$\{$ mamíferos $\} \subset \{$ vertebrados $\}$.
$\{$ múltiplos de 6 $\} \subset \{$ múltiplos de 3 $\}$.
$\{$ múltiplos de 3 $\} \not\subset \{$ múltiplos de 2 $\}$.
$\{$ mis hermanos $\} \subset \{$ mis parientes $\}$.
$\{$ mis hermanos $\} \not\subset \{$ los hermanos de mi hermano Juan $\}$?
$\{$ rectángulos $\} \supset \{$ cuadrados $\}$.
$\{$ divisores de 24 $\} \supset \{$ divisores de 12 $\}$.

Propiedades de la inclusión

1º) Sea $\emptyset$ el conjunto vacío, y D un conjunto cualquiera. Como $\emptyset$ no tiene ningún elemento, si un objeto c no está en D, tampoco puede estar en $\emptyset$:

$$c \notin D \implies c \notin \emptyset$$

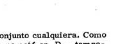
lo cual sabemos que significa: $\emptyset \subset D$.

O sea: el conjunto vacío es parte de todos los conjuntos.

2º) Si I es nuestro conjunto universal, cualquier conjunto D que utilicemos estará incluido en I. Basta recordar que en I están todos los objetos que usamos, y por lo tanto $r \in D \implies r \in I$.

O sea: el conjunto universal incluye a todos los conjuntos.

3º) En el gráfico vemos que $G \subset H$ y $H \subset L$, y de cualquier modo que dibujemos la figura, si esto es cierto también se cumplirá que $G \subset L$: la inclusión es una relación transitiva.



Si R, S y T son tres conjuntos cualesquiera, y se sabe que $R \subset S$ y que $S \subset T$, entonces se deduce que $R \subset T$.

La demostración es muy fácil, pero para hacerla bien clara la representaremos como si fuera un diagrama de flujo, con los distintos pasos encerrados en rectángulos. Estos rectángulos no encierran ahora instrucciones sino proposiciones verdaderas.

Usaremos dobles flechas para indicar que de uno o varios rectángulos se deduce otro.

Las hipótesis son: $R \subset S$ y $S \subset T$. Queremos demostrar $R \subset T$, o sea que si $r \in R$ entonces $r \in T$.

$r \in R$ será entonces una nueva premisa o hipótesis, y $r \in T$ la conclusión. Las hipótesis se reconocen porque no les llegan flechas, y la conclusión, porque de ella no sale ninguna flecha.

Ésta es la demostración. De las dos premisas, $r \in R$ y $R \subset S$, se deduce (doble flecha) que $r \in S$, y de ésta y $S \subset T$, que $r \in T$.

Empezando con $r \in R$ entonces llegamos a $r \in T$: $r \in R \Longrightarrow r \in T$, o sea $R \subset T$

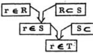


Diagrama N°6

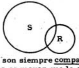
Notemos en cambio que la relación de pertenencia $\in$ no es transitiva: si c es un punto de la recta R, y B es un conjunto de rectas, entre ellas R, se tiene que

$$c \in R \quad y \quad R \in B, \quad \text{pero} \quad c \notin B$$

pues los elementos de B son rectas, no puntos.

4°) Si $R \subset S$, S es más grande (o por lo menos igual) que R, pues tiene todos los elementos de R y tal vez otros más. La inclusión se parece pues a la relación de tamaños, pero tiene una importante diferencia:

el círculo S es más grande que el R pero no lo incluye. No es cierto que $R \subset S$.



Tampoco es cierto que $S \subset R$, ni que $R = S$.

Para el tamaño no sucede esto: dos figuras son siempre comparables. Si no son de igual tamaño, una de las dos es mayor que la otra.

Para la inclusión, en cambio, lo más frecuente es que dos conjuntos sean incomparables: ninguno de los dos es parte del otro.

La inclusión sirve para ordenar conjuntos por "tamaño", pero solo parcialmente. Así

$$\{\text{paralelogramos}\} \quad y \quad \{\text{polígonos regulares}\}$$

son incomparables: ni todos los paralelogramos son polígonos regulares, ni todos los polígonos regulares son paralelogramos.

Los conjuntos {vertebrados} y {árboles} son incomparables. Más aún, no tienen ni un solo elemento en común, y por eso se llaman disjuntos.

Dos conjuntos se llaman disjuntos si no hay ningún objeto que pertenezca a los dos a la vez.

Ejercicios

1) Para la inclusión, los conjuntos {mis hermanos} y {los hermanos de mi hermano Juan} son incomparables.

¿En qué caso son disjuntos?

2) $\{$múltiplos de 17$\}$ y $\{$múltiplos de 20$\}$ son incomparables. Son disjuntos? ¿Pueden remplazarse 17 y 20 por dos números de manera que esos conjuntos sean disjuntos?

3) Dibujar dos cuadrados de igual tamaño, incomparables y que no sean disjuntos.

¿Cuántas partes tiene un conjunto?

Un conjunto de dos elementos, como $S = \{c, d\}$ tiene cuatro partes: los cuatro conjuntos:

$$\{c\}\ ,\ \{d\}\ ,\ \emptyset \ \text{ y } \ S\ .$$

$\emptyset$ y S son siempre partes de S , no importa cómo sea S .

Si $R = \{c, d, e\}$ sus partes son:

$\emptyset$, $\{c\}$, $\{d\}$, $\{e\}$, $\{c,d\}$, $\{c,e\}$, $\{d,e\}$ y $R = \{c, d, e\}$;

en total 8 .

Un conjunto de un solo elemento tiene dos partes: él mismo y $\emptyset$.

$\emptyset$ tiene un solo subconjunto: $\{\emptyset\}$. O sea, un conjunto con cero elementos tiene una sola parte.

Ya es hora de pensar un poco y tratar de encontrar la fórmula que nos diga cuántas partes o subconjuntos tiene un conjunto de n elementos.

Sea $T = \{c, d, e, f\}$ y escribamos sus partes de manera que podamos compararlas con las de $R = \{c, d, e\}$:

$$\emptyset, \{c\}, \{d\}, \{e\}, \{c,d\}, \{c,e\}, \{d,e\}, \{c,d,e\}$$
$$\{f\}, \{c,f\}, \{d,f\}, \{e,f\}, \{c,d,f\}, \{c,e,f\}, \{d,e,f\}, \{c,d,e,f\} = T.$$

Éstas son todas las partes de T incluidas $\emptyset$ y T . Pero la primera fila coincide con las partes de R , que eran 8. Y la segunda fila se obtiene de la primera agregando el nuevo elemento f a cada una de las partes de R .

Estos conjuntos de la segunda fila son diferentes de los de la primera porque todos tienen el elemento f , y son diferentes entre ellos porque los de la primera fila son diferentes entre ellos.

Y toda parte de T tiene que estar en la segunda o en la primera fila, según contenga o no a f .

T tiene entonces el doble de partes que R , así como R tenía el doble que S , S tenía el doble que un conjunto de un solo elemento y éste el doble de partes que $\emptyset$.

Al aumentar un elemento, el número de partes se <u>duplica</u>.

Un conjunto de dos elementos tiene $4 = 2 \times 2$ partes.

Un conjunto de tres elementos tiene $8 = 4 \times 2 = 2^3$ partes.

Un conjunto de cuatro elementos tiene $16 = 8 \times 2 = 2^4$ partes.

Y un conjunto de n elementos tiene 2^n partes, pues podríamos repetir el razonamiento para 5, 6, . . . elementos.

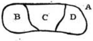
La fórmula para calcular el número de partes de un conjunto de k elementos es pues: 2^k .

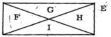
Ejercicios

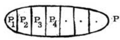
4) ¿Cuántas partes diferentes tiene un conjunto de 5 elementos? Escríbalas todas.
5) ¿Cuántas partes propias tiene un conjunto de n puntos?
6) En un partido de fútbol, todos los jugadores del equipo A que se llaman Juan se lastimaron. ¿Cuántos posibles grupos de jugadores de A pueden haberse lastimado?
7) Mi padre sale a pasear cada domingo con alguno o varios de sus 6 hijos. Este año prometió que no saldría dos veces con el mismo grupo. ¿Puede cumplir su promesa?
8) ¿Cuántas partes de un solo elemento tiene un conjunto de n elementos?
9) ¿Cuántas partes de n-1 elementos tiene un conjunto de n elementos?
10) ¿Cuántas de 2 elementos?
11) ¿Cuántas de n-2 ?

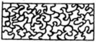
Particiones

La palabra "parte" también se relaciona con la idea de partir un objeto en pedazos. Esa misma idea podemos aplicarla a conjuntos, y da origen a lo que llamaremos una partición del conjunto.








rompecabezas

Los "pedazos" en que partimos un conjunto, son también conjuntos, incluidos en él. Se los llama "clases de la partición", o también "clases de equivalencia", por razones que veremos después.

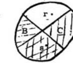
Examinemos algunos ejemplos. Todo rompecabezas es una partición del conjunto de puntos de la figura completa. Las piezas son las clases.

Lo mismo pasa con un mapa político de América: los países son las clases.

Dar una partición del conjunto A significa decir cuáles son las clases, o sea cuáles son los trozos en que dividimos al conjunto A. Las clases son los elementos de la partición; la partición es un conjunto de clases. Pero no cualquier conjunto de clases es una partición.

En la figura de la página anterior, A es un conjunto de puntos, que hemos partido en las clases B, C y D. Estos tres conjuntos son los elementos de un nuevo conjunto, que es la partición: $\{B, C, D\}$. Esta partición tiene tres elementos.

Si damos varias partes de A de cualquier manera, ellas no formarán en general una partición. Así B y C no forman una partición de A en la figura, por dos motivos: hay puntos de A, como r, que no están en ninguna de las dos clases, y hay otros, como s, que están en las dos.



Digamos entonces exactamente qué es una partición.

Una partición de un conjunto A es una familia de conjuntos llamados clases, que cumplen estas 4 propiedades:

1) Dos clases de la partición son siempre disjuntas (no tienen puntos comunes).
2) Las clases cubren el conjunto A (o sea, cada punto de A está en alguna de las clases)
3) Cada clase está incluida en A (es una parte de A).
4) Ninguna clase es vacía (cada una contiene por lo menos un punto, pero puede contener uno solo).

Ejemplos

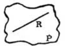
Si $\underline{N}$ es, como siempre, el conjunto de los números naturales, una partición de $\underline{N}$ podría obtenerse poniendo en una clase todos los números pares y en otra todos los impares. El conjunto

$$\{\{\text{pares}\}\ ,\ \{\text{impares}\}\}$$

es una partición de $\underline{N}$ en dos clases.

El conjunto $\{\{\text{menores que } 10\}\ ,\ \{10\}\ ,\ \{\text{mayores que } 10\}\}$ es otra partición de $\underline{N}$, en tres clases, una de las cuales tiene un solo elemento.

Todas las rectas de un plano P paralelas a una recta dada, incluyendo a ésta, forman una partición de P en infinitas clases: cada clase es una de estas rectas.



En el plano P trazo la recta R ; ella determina dos semiplanos. ¿Forman éstos una partición de P ? Si en los semiplanos no incluimos el borde, no son partición porque los puntos de R no están en ninguno de los dos.

Si incluimos el borde en ambos, tampoco forman partición pues no son disjuntos. Hay que incluir R en uno de los semiplanos y no en el otro (o repartir los puntos de R entre ambos semiplanos).

Siempre que hagamos una partición de una figura tendremos que pensar qué hacemos con los puntos que están en los bordes de las clases, para que se cumplan las condiciones 1) y 2) .

Las clasificaciones son ejemplos bastante frecuentes de particiones. Así {vertebrados} es un conjunto de animales que se parte en {peces}, {aves}, {mamíferos}, etc.

Una clasificación de los seres humanos podría ser por sexo: {{varones}, {mujeres}}. Otra podría ser por nacionalidad: {argelinos}, {argentinos}, {australianos}, etc.

Otra más podría ser por edades. Hay muchas maneras de partir y clasificar un mismo conjunto.

Una partición que siempre se puede hacer es pensar que cada elemento forma una clase. Otra, tan poco útil como la anterior, es pensar que hay una sola clase: todo el conjunto. Estas particiones son triviales.

Ejercicios

12) Dar dos particiones diferentes de cada uno de los siguientes conjuntos:

a) {los insectos},

b) {los jugadores de un equipo de fútbol},

c) {los divisores de 12},

d) {los países del mundo},

e) {los planetas}.

13) ¿Por qué las siguientes no son particiones de los respectivos conjuntos del ejercicio anterior?

a) {{insectos de 4 patas}, {insectos de 6 patas}, {insectos de 8 patas}},

b) {{jugadores rápidos}, {jugadores hábiles}, {jugadores recios}},

c) {{divisores de 8}, {3, 6, 12}},

d) {{países americanos}, {países africanos}, {países europeos}, {países asiáticos}},

e) {{planetas más pequeños que la Tierra}, {planetas más grandes que la Tierra}, {planetas con agua}}.

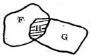
14) Con todas las personas formamos conjuntos de hermanos (varones y mujeres) de manera que cada conjunto sea un grupo completo de hermanos. ¿Es ésta una partición en el conjunto {todas las personas}?

15) Formamos conjuntos con los números naturales incluyendo el 0, de esta manera: dos números están en el mismo conjunto si divididos por 12 dan el mismo resto (contamos también como resto a 0). ¿Se ha obtenido una partición del conjunto $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$?

Capítulo IV

OPERACIONES ENTRE CONJUNTOS

Intersección



Tenemos aquí dos figuras: F y G . La intersección de ambas está formada por los puntos comunes a F y G ; es el conjunto H (figura rayada).

Aunque no se trate de figuras, seguiremos llamando intersección de dos conjuntos A y B al conjunto formado por los elementos que están a la vez en los dos, que pertenecen a A y a B .

El que entiende qué es "y" entiende lo que es intersección. Así, la intersección de estos dos conjuntos:

$D = \{2,3,9,11\}$, $E = \{9,7,3,1\}$,

es

$F = \{3,9\}$.

La intersección de:

M = {actuales habitantes de Buenos Aires},

N = {mis amigos},

está formada por las personas que pertenecen a M y N : por los actuales habitantes de Buenos Aires, que son, además, amigos míos.

La palabra "intersección" se abrevia con el símbolo $\cap$ colocado entre los conjuntos que se intersecan o cortan. Así:

$M \cap N$

se lee "intersección de M y N" o " M intersección N ".

$M \cap N$ es lo mismo que $N \cap M$.

Pensar si la definición que dimos de intersección de dos conjuntos está bien simbolizada así:

$A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ y } x \in B \}$.

De igual modo se define la intersección de tres o más conjuntos: es el conjunto formado por los elementos comunes a todos los conjuntos dados.

La intersección de {días del mes de marzo} , {días de sol} , {días de este año} , es el conjunto de los días de sol de marzo de este año.

Si A , B y C son tres conjuntos, la intersección de los tres se indica:

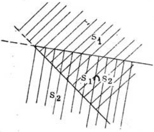
$\bigcap \{A,B,C\}$, o bien $A \cap B \cap C$.

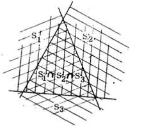
Un ángulo es siempre la intersección de dos semiplanos (ver figura en la página siguiente).

Un triángulo es la intersección de tres semiplanos y un polígono convexo de n lados es intersección de n semiplanos.

¿Puede un círculo originarse como intersección de semiplanos?

¿Puede ser vacía la intersección de dos semiplanos?





Ejercicios

1) Demostrar: $\{$múltiplos de 3$\} \cap \{$múltiplos de 5$\} = \{$múlti - plos de 15$\}$.-

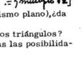
2) Hallar $\{$múltiplos de 6$\} \cap \{$múltiplos de 4$\}$.= {múltiplo 12}

3) La intersección de tres semiplanos (de un mismo plano), ¿da siempre un triángulo?

4) ¿Qué es la intersección de dos ángulos? ¿De dos triángulos? ¿De una recta y una circunferencia? Pensar en todas las posibilidades.

Conjuntos disjuntos

Hay conjuntos sin ningún punto común; los hemos llamado disjuntos. Por ejemplo: $\{$ mujeres $\}$, $\{$varones$\}$. Su intersección, entonces es vacía. Dos conjuntos son disjuntos si y solo si su intersección es vacía.



$R \cap S = \emptyset$

Las figuras R y S son conjuntos disjuntos: $R \cap S = \emptyset$.

Ejercicios

¿Son disjuntos:

5) $\{$palabras graves$\}$, $\{$palabras agudas$\}$,

6) $\{$tus amigos$\}$, $\{$los amigos de tu hermano$\}$.

7) $\{$estas dos colecciones de estampillas$\}$, $\{$las estampillas de estas dos colecciones$\}$?

¿Cómo se llaman dos rectas de un mismo plano que son disjuntas? $\parallel^s$

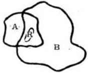
La recta R es paralela al plano P si y solo si $R \cap P = \emptyset$ o $R \cap P = R$.

Dos clases diferentes de una partición tienen intersección vacía.

La intersección y la inclusión

Si un conjunto está contenido en otros dos, está contenido en la intersección de ambos.

$R \subset A$ y $R \subset B \Longrightarrow R \subset A \cap B$.



Pues cada punto de R está en A y en B , o sea está en $A \cap B$.

Al revés, cualquier conjunto S que esté incluido en la intersección de dos conjuntos está incluido en cada uno de ellos.

$S \subset A \cap B \Longrightarrow S \subset A$ y $S \subset B$.

Pues si cada elemento de S está en $A \cap B$, esto significa que cada elemento de S está en A y también en B .

Como caso particular: la misma intersección de A y B está incluida en A e incluida en B :

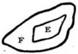
$A \cap B \subset A$ y $A \cap B \subset B$.

Si un conjunto es parte de otro, la intersección de los dos es el más chico.

En símbolos :

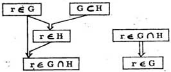
$E \subset F \Longrightarrow E \cap F = E$.

Si los conjuntos son figuras esto es evidente:



Si M = {mujeres} y A = {mujeres argentinas}, ¿quiénes son a la vez mujeres y mujeres argentinas? Las mujeres argentinas.

Para conjuntos cualesquiera G y H :



de modo que

$r \in G \Longrightarrow r \in G \cap H$,

y

$r \in G \cap H \Longrightarrow r \in G$,

o sea

$G = H \cap G$

$G \subset H$	$\Longrightarrow$	$G \cap H = G$.
si un conjunto está incluído en otro,	entonces	la intersección de los dos es el primero.

Estudiemos la situación recíproca: si sabemos que la intersección de dos conjuntos J y K es uno de ellos, $J \cap K = J$, ¿ qué podemos deducir de esto? (dibujar figuras que estén en estas condiciones).

Deducimos que, por ser J la intersección de los dos conjuntos, todos los puntos de J están también en K ; es decir: $J \subset K$;

$J \cap K = J$	$\Longrightarrow$	$J \subset K$
si la intersección de dos conjuntos es uno de ellos,	entonces	éste está incluido en el otro

Esta afirmación es recíproca de la anterior. En ambas figuran las mismas proposiciones:

"un conjunto está contenido en otro"
"la intersección de dos conjuntos es uno de ellos"

y hemos demostrado que cualquiera de estas dos proposiciones implica la otra: son equivalentes, cosa que simbolizaremos con una flecha de dos puntas:

$A \cap B = A \Longleftrightarrow A \subset B$

significa:

si $A \cap B = A$, entonces $A \subset B$
y si $A \subset B$ entonces $A \cap B = A$;

o sea:

$A \cap B = A$ es condición necesaria y suficiente para que $A \subset B$.

Por lo tanto para todo conjunto S se cumple:

$\emptyset \cap S = \emptyset$, $S \cap S = S$, $S \cap I = S$ (siendo I el conjunto universal).

Unión

La conjunción " o " se usa en dos sentidos distintos.

Si digo: "me compraré un auto caro o uno chico ", se entiende que no pienso comprar un auto que sea chico y caro. Se trata de un " o " que excluye una de las dos posibilidades: es un " o " excluyente.

Si un club permite entrar gratis al estadio a sus socios o a niños menores de 8 años, ¿qué debe hacerse con un niño de 6 años que también es socio? No hay duda: debe entrar gratis. Se trata de un "o" inclusivo.

Si me dicen que haga un catálogo de los libros de Botánica o de Zoología y aparece un libro que trata de ambas cosas, debo incluirlo o no ? No sé, acá el "o" puede ser excluyente o inclusivo. Por eso aclaramos que en las definiciones y demostraciones usaremos siempre el "o" inclusivo. Si A es el conjunto de los objetos que tienen cierta propiedad (por ejemplo, ser amarillos) y B el de los que tienen otra (por ejemplo, ser blandos), entonces la propiedad de ser:

"amarillo o blando"

la tienen aquellos objetos que son amarillos, también los que son blandos y también los que son amarillos y blandos a la vez. Todos ellos forman un nuevo conjunto que se llama la unión de A y B , y que se simboliza así:

$A \cup B$

$A \cup B$

$A \cup B$ es lo mismo que $B \cup A$.

Si

$C = \{ \text{Juan, piedra, } 37 \}$ y $D = \{ \text{perro, piedra} \}$,

entonces

$C \cup D = \{ \text{Juan, piedra, } 37, \text{perro} \}$.

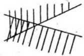
En símbolos:

$A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ o } x \in B \}$

(no hace falta agregar " o $x \in A$ y B " pues ya hemos dicho que eso está incluido en el significado de "o").

Ejercicios

8) Dibujar dos triángulos cuya unión sea un cuadrado.
9) Todo polígono de n lados es unión de n-2 triángulos
10) La unión de dos semiplanos da casi siempre un ángulo cóncavo. ¿Qué otros casos se pueden presentar?



Evidentemente cada conjunto de los que se unen está incluido en la unión:

$A \subset A \cup B$ y $B \subset A \cup B$.

Puede también definirse la unión de tres o más conjuntos. Está formada por aquellos elementos que están por lo menos en uno de los conjuntos.

Si éstos son, por ejemplo, A , B y C, la unión se simboliza:

$\bigcup \{A, B, C\}$ o bien $A \cup B \cup C$

Si A, B, C y D forman una partición del conjunto H , entonces $\bigcup\{A, B, C, D\} = H$ pues por definición de partición, cada punto de H está en alguno de los conjuntos A, B, C, o D . Y cada punto de éstos está en H .

Si en un conjunto, por ejemplo $A = \{p, q, v\}$, pensamos que cada uno de sus puntos forma un conjunto de un solo elemento: $\{p\}$ $\{q\}$ $\{v\}$, entonces A es la unión de todos esos conjuntos: $A = \bigcup\{\{p\}, \{q\}, \{v\}\}$.

Más aún: "un conjunto es la unión de todas sus partes."

La unión de todas las partes de A se indica: $\bigcup\{B \mid B \subset A\}$

Afirmamos pues que: $A = \bigcup\{B \mid B \subset A\}$. Demostrarlo (de manera análoga al caso de la partición).

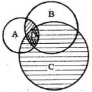
Ejercicios

Demostrar también las siguientes fáciles propiedades:

11) $A \cup \emptyset = A$
12) $A \cup A = A$
13) $A \cup I = I$
14) $A \cup B = B \cup A$
15) $A \subset R$ y $B \subset R \iff A \cup B \subset R$
16) $A \subset B \iff A \cup B = B$

Propiedades distributivas de la intersección y la unión

Si tengo tres conjuntos ya sé que la intersección de los tres, $\bigcap\{A, B, C\}$ está formada por los elementos comunes a todos ellos. En seguida se nos ocurre que si hallamos la intersección de A y B -llamémosla D - y luego cortamos a D con C habremos obtenido la intersección de los tres conjuntos. (El hecho de que la intersección que buscamos se pueda indicar de este otro modo: $A \cap B \cap C$, lo hace suponer también).



$D \cap C = (A \cap B) \cap C$

Así es: no hay más que decir claramente cuáles son los puntos de D y C y se verá que son los mismos de $A \cap B \cap C$.

Si queremos expresar esto sin darle un nombre especial a $A \cap B$, escribiremos:

$$(A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C ,$$

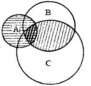
donde los paréntesis se ponen para indicar que lo que encierran debe considerarse como un solo conjunto, y por eso hay que hacer primero la operación señalada dentro de ellos.

También

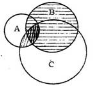
$$A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C ,$$

$$(A \cap C) \cap B = A \cap B \cap C$$

(basta pensar en los elementos de estas intersecciones).



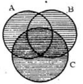
$A \cap (B \cap C)$



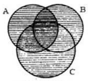
$(A \cap C) \cap B$

Lo mismo sucede con la unión.
No importa el orden en que se van uniendo los conjuntos:

$A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C = (B \cup C) \cup A$



$(A \cup B) \cup C$

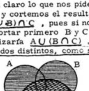


$A \cup (B \cup C)$

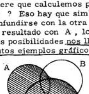
Pero veamos qué sucede si mezclamos las dos operaciones.
Si nos dicen que hallemos:

$$A \cup B \cap C$$

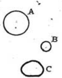
no está claro lo que nos piden. ¿Se quiere que calculemos primero $A \cup B$ y cortemos el resultado con C ? Eso hay que simbolizarlo $(A \cup B) \cap C$, pues si no, puede confundirse con la otra posibilidad: cortar primero B y C y unir el resultado con A , lo que se simbolizaría $A \cup (B \cap C)$. Y las dos posibilidades nos llevan a resultados distintos, como se ve en estos ejemplos gráficos.



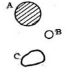
$(A \cup B) \cap C$



$A \cup (B \cap C)$



$(A \cup B) \cap C = \emptyset$



$A \cup (B \cap C) = A$

Esto pasa también en las operaciones con los números:

$$(3+2) \times 4 = 20 \quad \text{pero} \quad 3+(2 \times 4) = 11$$

Hay, sin embargo, una ley "distributiva" para el primer caso:

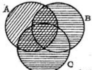
$$4 \times (3+2) = 4 \times 3 + 4 \times 2$$

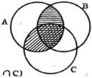
Para el segundo caso no hay tal ley:

$$3 + (2 \times 4) \neq (3+2) \times (3+4) \quad \text{pues} \quad 11 \neq 35$$

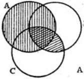
Para la unión y la intersección valen en cambio ambas leyes distributivas.

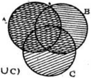
$$\boxed{\begin{aligned} A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{aligned}}$$





$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$





$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Demostraremos la primera ley distributiva y la segunda quedará como ejercicio.

Hay que demostrar que cualquier elemento z del primer miembro, $A \cap (B \cup C)$, está también en el segundo miembro $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ y viceversa.

Veamos que:

$$z \in A \cap (B \cup C) \Longrightarrow z \in (A \cap B) \cup (A \cap C) .$$

$$\boxed{z \in A \cap (B \cup C)}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{z \in A \ \text{ y } \ z \in (B \cup C)}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{z \in A \ \text{ y } \ (z \in B \ \text{ o } \ z \in C)}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{(z \in A \ \text{ y } \ z \in B) \ \text{ ó } \ (z \in A \ \text{ y } \ z \in C)}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{z \in (A \cap B) \ \text{ o } \ z \in (A \cap C)}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{z \in (A \cap B) \cup (A \cap C)}$$

Obsérvese que para pasar del rectángulo 3 al rectángulo 4 se ha procedido así: si se cumple simultáneamente que " $z \in A$ " y " $z \in B$ o $z \in C$ " , eso es lo mismo que afirmar que o bien son multáneamente verdaderas las proposiciones " $z \in A$ " y "$z \in B$" bien son simultáneamente verdaderas las proposiciones " $z \in A$" "$z \in C$ ".

Es decir:

$$z \in A \cap (B \cup C) \Longrightarrow z \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

lo que es lo mismo:

$$A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C) .$$

Además:

$$\boxed{z \in (A \cap B) \cup (A \cap C)}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{z \in A \cap B \ \text{ o } \ z \in A \cap C}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{(z \in A \ \text{ y } \ z \in B) \ \text{ o } \ (z \in A \ \text{ y } \ z \in C)}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{z \in A \ \text{ y } \ (z \in B \ \text{ o } \ z \in C)}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{z \in A \ \text{ y } \ z \in (B \cup C)}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{z \in A \cap (B \cup C)}$$

Es decir:

$$z \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \implies z \in A \cap (B \cup C)$$

o, lo que es lo mismo:

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C) .$$

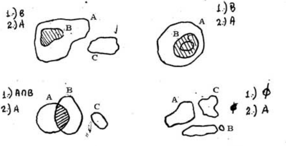
Como resultado de estas dos deducciones resulta pues:

$$\boxed{(A \cap B) \cup (A \cap C) = A \cap (B \cup C)}$$

Si se comparan los diagramas usados en esta demostración se ve que uno cualquiera es estrictamente el inverso del otro.

Ejercicio

Verificar que la propiedad distributiva de la unión y la intersección se cumple para las figuras A , B y C .



1) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
2) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Complemento y diferencia

Complemento

Toda propiedad - como la de ser mamífero - dijimos ya que define un conjunto: el de todos los objetos que tienen esa propiedad. Al mismo tiempo define otro conjunto: el de los que no tienen esa propiedad.

Si

$$M = \{\text{mamíferos}\} \qquad y \qquad N = \{\text{no mamíferos}\} ,$$

N se llama complemento de M y se lo simboliza:

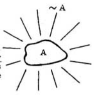
$N = \sim M$

(En muchos libros se usan también los símbolos $N = \complement M$ y $N = \overline{M}$) $\sim A$ está formado por los elementos que no pertenecen a A .

$r \in \sim A$ si y solo si $r \notin A$

o sea:

$\sim A = \{ x \mid x \notin A \}$



Si A es una figura y sus elementos son los puntos encerrados dentro de ella, $\sim A$ está formado por los puntos que quedan fuera de A. ¿Cuál es el complemento de $\sim A$? Está formado por los puntos que no están en $\sim A$, los que no quedan fuera de A , o sea exactamente los de A .

$$\sim \sim A = A$$

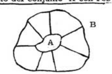
El complemento de $\emptyset$ es I y el de I es $\emptyset$. Demostrarlo. El complemento representa, pues, la negación.

La mayor parte de las veces usamos, sin embargo, la negación en un sentido menos amplio. Cuando decimos que "algo" no tiene la propiedad de ser mamífero, ese "algo" en que estamos pensando es un animal, no un objeto cualquiera. Estamos, en realidad, hablando del conjunto de los animales que no son mamíferos. Cuando hablamos de objetos que no son múltiplos de 10, no estamos pensando en los perros, por ejemplo, sino en los números que no son múltiplos de 10. Es decir, se trata seguramente de un problema de Aritmética en el que no interesan las cosas que no son números. En un caso así es mejor ponerse de acuerdo al comienzo y limitar el conjunto universal a los números. Diremos: en este problema , nuestro universo N está formado por los números, o sea, hablaremos solamente de conjuntos de números.

Cuando dibujamos en el pizarrón conjuntos, casi siempre estamos pensando que el conjunto universal es el pizarrón P ; en ese caso el complemento de un triángulo está formado por los puntos del pizarrón que no están en el triángulo.

Pero entonces, para que no haya confusiones, conviene especificar, cuando se habla de complemento, cuál es el conjunto universal que se está usando. Diremos "complemento del conjunto A con respecto a tal o cual conjunto".

Así la parte rayada de esta figura es el complemento de A con respecto a B , si éste es el conjunto "universal " que interesa.



En esos casos y para que no haya confusión en vez de escribir $\sim A$ se escribe:

$$\boxed{B \sim A}$$

que se lee: " complemento de A con respecto a B ".

$B \sim A$ está formado por todos los puntos de B que no están en A .

También se puede decir " diferencia entre B y A " pues se parece algo a la resta:

$B \sim A$ contiene los puntos de B que quedan después de quitar los de A .

Entonces:

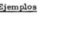
$\sim A$ resulta ser la abreviatura de $I \sim A$ y así hay que pensarlo.

Pero podemos repetir esto para dos conjuntos cualesquiera G y H , aunque ninguno de los dos merezca llamarse "universal".

Llamaremos diferencia de G menos H , al conjunto, simbolizado $G \sim H$, formado por todos los elementos de G que no pertenecen a H :

$$x \in G \sim H \iff x \in G \quad y \quad x \notin H$$

Ejemplos



$G \sim H = G$

$G \sim H = \emptyset$

$G \sim H$ parte rayada

Algunas propiedades importantes de la complementación

$$1^{o})\ (\sim A) \cap A = \emptyset$$

(ponemos los paréntesis para que no se confunda con la negación de $A \cap A$: $\sim (A \cap A)$)

pues si un elemento x pertenece a la intersección de A y $\sim A$ es porque

$$x \in A \quad y \quad x \in \sim A \ ,$$

o sea

$$x \in A \quad y \quad x \notin A \ , \text{ absurdo.}$$

Entonces, ningún x está en A y $\sim A$, o sea:

$$A \cap \sim A = \emptyset \ .$$

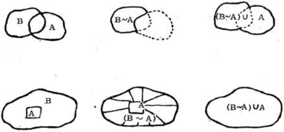
$$2^{o})\ (B \sim A) \cap A = \emptyset$$

Igual demostración que la anterior.

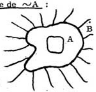
$$3^{o})\ (\sim A) \cup A = I$$

pues todo elemento está en A o en $\sim A$.

4º) $A \cup (B \sim A) \supset B$.
pero si $B \supset A$, entonces $A \cup (B \sim A) = B$.
Demostrarlo con ayuda de las figuras:



5º) Si A es parte de B , $\sim B$ es parte de $\sim A$:



$A \subset B \implies \sim B \subset \sim A$

O sea: cuanto más chico es un conjunto mayor es su complemento.

Para probar que $\sim B \subset \sim A$ hay que demostrar que todo elemento de $\sim B$ pertenece también a $\sim A$. O sea que:

todo elemento que no está en B tampoco está en A .

Pero esto es cierto: si $x \notin B$, entonces $x \notin A$, pues $A \subset B$.

se supone que B es un conjunto universal y 6º) $B \sim B = \emptyset$

$B \sim \emptyset = B$

Ejercicios

√17) $B \supset A \implies B \sim (B \sim A) = A$

pero si $B \not\supset A$ vale la fórmula:

$B \sim (B \sim A) = A \cap B$

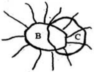
¿La fórmula anterior es realmente distinta de ésta? No, pues como $B \supset A$

√18) Demostrar $G \sim H = G \cap (\sim H)$ $A \cap B = A$

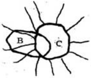
Leyes de DeMorgan :

$\sim(B \cup C) = (\sim B) \cap (\sim C)$

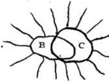
o "el complemento de la unión es la intersección de los complementos".



$\sim B$



$\sim C$



$\sim (B \cup C)$

Como siempre para demostrar que estos dos conjuntos son iguales hay que probar que todo punto del primero está en el segundo y todo punto del segundo está en el primero.

Sea $x \in \sim(B \cup C)$	$\boxed{x \in \sim(B \cup C)}$
	$\Downarrow$
o sea $x \notin (B \cup C)$	$\boxed{x \notin (B \cup C)}$
	$\Downarrow$
Los puntos de $B \cup C$ son los que están en B, o en C (o en ambos). Si x no está en B o C es porque no está ni en B ni en C; o sea: $x \notin B$ y $x \notin C$,	$\boxed{\text{y } \begin{matrix} x \notin B \\ x \notin C \end{matrix}}$
	$\Downarrow$
o sea $x \in \sim B$ y $x \in \sim C$.	$\boxed{\text{y } \begin{matrix} x \in \sim B \\ x \in \sim C \end{matrix}}$
	$\Downarrow$
Pero entonces: $x \in (\sim B) \cap (\sim C)$	$\boxed{x \in (\sim B) \cap (\sim C)}$

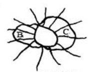
La otra parte de la demostración: si $x \in (\sim B) \cap (\sim C)$ está en $\sim (B \cup C)$, se puede seguir en este cuadro, yendo de abajo hacia arriba.

Ejercicios

19) Demostrar la otra ley de DeMorgan

$$\sim (B \cap C) = (\sim B) \cup (\sim C)$$

o "el complemento de la intersección es la unión de los complementos".

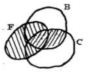


$\sim (B \cap C)$

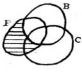
20) Demostrar también las leyes correspondientes para diferencias:

$$F \sim (B \cap C) = (F \sim B) \cup (F \sim C)$$

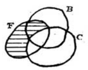
$$F \sim (B \cup C) = (F \sim B) \cap (F \sim C)$$



$F \sim (B \cap C)$



$F \sim B$



$F \sim C$

Ejercicios generales del capítulo IV

21) Averiguar los resultados de estas operaciones entre conjuntos:

a) $(A \cup A) \cap I$
b) $(A \sim \emptyset) \sim A$
c) $B \cap (\emptyset \sim \emptyset)$
d) $(\sim \sim A) \cap I$
e) $(A \sim \emptyset) \cap (A \cap I)$
f) $(B \cap \emptyset) \sim (A \cup B)$
si $B \subset A$: g) $B \sim (A \cap B)$
h) $(\sim \sim A) \cap (A \cup B)$
i) $(A \sim B) \cup (B \cap A)$

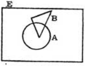
22) Hallar el resultado de estas operaciones:

a) $I \cup [(A \cup B) \cap A]$
b) $[(A \cap B) \cap \emptyset] \cup (\emptyset \cup A)$
c) $[(I \cap A) \cup \sim A] \cup (\sim B \cup B)$
d) $[(\sim \sim A) \cap I] \cup (\sim A \cap A)$
e) $[A \sim (A \sim B)] \cup (\sim \sim B)$
f) $(B \cup I) \cap [\sim A \cup (A \sim A)]$
g) $[(A \cup B) \cup (B \cup A)] \cap (A \cup \emptyset)$
h) $(I \cap B) \sim [(B \cap A) \cap (A \cap B)]$
i) $[(A \sim B) \cup A] \cap [(I \cap A) \cup B]$

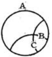
si $B \subseteq A$:

j) $[(A \cap B) \sim A] \cup [B \sim (A \cap B)]$
k) $[A \sim (A \sim B)] \cap (B \sim \emptyset)$

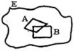
Buscar el resultado de las operaciones indicadas:



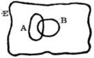
$A \cap B \quad E \sim (A \cap B)$
$A \cup B \quad E \sim (A \cup B)$



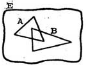
A es todo el círculo
B y C tienen una parte común
$B \cap C \quad A \sim (B \cap C)$
$B \cup C \quad A \sim (B \cup C)$



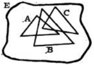
$E \sim A \quad A \sim E$
$E \sim B \quad B \sim E$



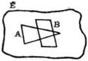
$(E \sim A) \sim B \quad E \sim (A \sim B)$
$(E \sim B) \sim A \quad E \sim (B \sim A)$



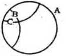
$E \sim A$
$E \sim B$
$(E \sim A) \cap (E \sim B)$
$(E \sim A) \cup (E \sim B)$



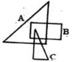
$A \cap B \cap C \quad E \sim (A \cap B \cap C)$
$A \cup B \cup C \quad E \sim (A \cup B \cup C)$



$E \sim A$
$E \sim B$
$(E \sim A) \cap (E \sim B)$
$(E \sim A) \cup (E \sim B)$

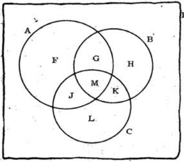


A es todo el círculo
B y C tienen una parte común
$A \sim B \quad A \sim C$
$(A \sim B) \cap (A \sim C) \quad (A \sim B) \cup (A \sim C)$



$A \sim B \quad A \sim C$
$(A \sim B) \cap (A \sim C) \quad (A \sim B) \cup (A \sim C)$

23)



A, B y C tienen puntos comunes $A \cap B \cap C = M$.

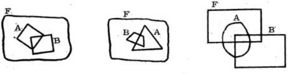
Al cortarse han quedado determinadas 7 partes: F, G, H, J, M, K, L, tales que dos de ellas no tienen puntos comunes (salvo puntos de los contornos). ¿Qué operaciones hay que hacer con A, B y C para obtener como resultado alguna de estas partes ?

Por ejemplo:

$G = (A \cap B) \sim C$; $M = A \cap B \cap C$; $F = A \sim (B \cup C)$

Decir cómo se obtienen J, L, K, H .- G, J, K tienen la misma estructura
F, L, H

Si A, B y C están incluidos en E , y los puntos de los contornos no se tienen en cuenta hay una parte que no tiene puntos comunes con ninguna de las 7 nombradas . ¿Cuál es ?



Hallar en cada caso:

$F \sim (A \cup B)$ y $F \sim (A \cap B)$

la diferencia de F y la unión $A \cup B$ y de F y la intersección $A \cap B$

$F \sim A$ y $F \sim B$

las diferencias F menos A y F menos B ;

$(F \sim A) \cup (F \sim B)$ y $(F \sim A) \cap (F \sim B)$

la unión y la intersección de las dos últimas diferencias;

y verificar las leyes de DeMorgan:

$F \sim (A \cup B) = (F \sim A) \cap (F \sim B)$,
$F \sim (A \cap B) = (F \sim A) \cup (F \sim B)$.

Se tiene el conjunto de los números de 1 a 10

$F = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$

y estos dos:

$C = \{$números de 1 a 10 divisibles por 2$\}$,
$B = \{$números de 1 a 10 divisibles por 5$\}$.

Dar los conjuntos $F \sim B$, $F \sim C$, $F \sim (B \cup C)$, $F \sim (B \cap C)$ enumerando sus elementos y verificar que se cumplen las mismas leyes que en el ejercicio anterior. En palabras:

Los números de 1 a 10 que no son divisibles por 2 o divisibles por 5, son los que no son divisibles por 2 ni por 5.

Los números de 1 a 10 que no son divisibles por 2 y por 5 a la vez, son los que no son divisibles por 2 o por 5.

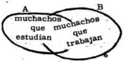
Para resolver problemas como los que veremos a continuación , resulta muy útil representar a los conjuntos por figuras.

Se sabe que un grupo G de 15 muchachos está formado exclusivamente por muchachos que estudian y trabajan. ¿Qué otros datos hay que conocer para que sea posible averiguar:

cuántos estudian,
cuántos trabajan,
cuántos estudian solamente,
cuántos trabajan solamente,
cuántos estudian y trabajan?

Todas estas posibilidades se destacan más fácilmente si hacemos un gráfico de los conjuntos:

$A = \{$muchachos que estudian$\}$, $B = \{$que trabajan$\}$
y $A \cup B = G$



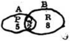
pues, como vemos, tenemos determinadas 5 zonas: A , B, P, R, y Q que podemos hacer corresponder a cada una de las 5 posibilidades indicadas. Los 15 muchachos se reparten entre ellas.

Si nos dicen que 7 estudian, ¿podemos averiguar cuántos trabajan? Si $A \cap B = \emptyset$ (los que trabajan no estudian), sí: son : $15 - 7$; pero en general, no: la diferencia 7 es el número de muchachos que solo trabajan y nos han preguntado el número de los que trabajan. Para contestar hace falta saber cuántos estudian y trabajan. Supongamos que sean dos.

Los elementos de P , de Q y de R , sí suman 15 pues son conjuntos disjuntos. También es 15 la suma de elementos de A y R y de B y P .

Entonces:

si en A hay 7 ,
en R hay $15 - 7 = 8$
y en B hay $8 + 2 = 10$.



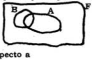
Finalmente,
P tiene $7 - 2 = 5$ elementos

Cambiemos un poco el problema:

24) Tenemos un grupo de 40 personas de las cuales:

algunas estudian o trabajan,
algunas no estudian ni trabajan.

Llamemos F al conjunto que forman las 40 personas. Tendremos que representar F por una figura cualquiera y dibujar en el interior de ella otras dos que se corten.



A = {personas que estudian} ,
B = { personas que trabajan} ,
N = {personas que ni estudian ni trabajan} ;

N es el complemento de $A \cup B$ con respecto a F : $N = F \sim (A \cup B)$.

Si por ejemplo nos dicen que:

hay 15 personas que no estudian ni trabajan,
10 personas que estudian,
3 personas que estudian y trabajan,

¿cuántas trabajan? ¿cuántas solo trabajan? ¿cuántas solo estudian?

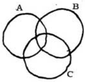
En la edición de un libro han resultado 120 ejemplares con fallas: fallas en el papel, fallas de impresión o fallas de encuadernación.

25) Si se sabe que:

68 libros tienen la primera falla por lo menos (pueden tener otras),
32 libros tienen la segunda falla, por lo menos ,
40 libros tienen la primera falla solamente ,
5 libros tienen la primera y segunda falla, pero no la tercera ,
17 libros tienen las fallas segunda y tercera, pero no la primera,
4 libros tienen las tres fallas,

¿cuántos libros tienen solo la tercera falla? ¿cuántos tienen la tercera falla, por lo menos?

En este caso todos los libros del conjunto inicial tienen alguna falla.



El esquema que corresponde al problema es:
A = {libros que tienen la primera falla},
B = {tienen segunda falla},
C = {tienen tercera falla}.
Para resolverlo solo hace falta interpretar claramente qué representan cada una de las 7 partes de la unión de A, B y C.

26) 100 personas respondieron a un cuestionario formado por 3 preguntas. Cada pregunta debía contestarse por sí o por no y una sola de estas respuestas era correcta. Si sabemos que
8 personas contestaron bien las tres preguntas,
9 personas contestaron bien solo la primera y la segunda,
11 personas contestaron bien solo la primera y la tercera,
6 personas contestaron bien solo la segunda y la tercera,
55 personas contestaron bien la primera pregunta, por lo menos,
32 personas contestaron bien la segunda pregunta, por lo menos,
49 personas contestaron bien la tercera pregunta, por lo menos,

¿Cuántas personas no contestaron ninguna pregunta?

Capítulo V

RELACIONES

En estas proposiciones:

Esta piedra es negra
Pablo es inglés

se atribuye una propiedad a un objeto.

En estas otras:

Alicia es amiga de Laura
Napoleón murió en 1819
Buenos Aires es la capital de la Argentina

también se dice que un objeto tiene una propiedad.

Pero para definir estas últimas propiedades se ha tenido que hacer referencia a otro objeto o ente. En "es amiga de Laura" se menciona a Laura. Si en vez de "Laura" dijera "Juana" se trataría de otra propiedad de Alicia. La proposición establece un vínculo, una relación entre Alicia y Laura. Esto es lo que, especialmente, nos interesa reconocer en el segundo grupo de oraciones: que la proposición da una relación entre el sujeto y el objeto mencionado en la propiedad. Así:

"es amiga de"

expresa una relación entre dos personas.

"murió en"

expresa una relación entre una persona y una fecha.

"es la capital de"

expresa una relación entre una ciudad y un país.

Dar otras proposiciones en las que se den estas mismas relaciones entre otros objetos.

Todas las proposiciones que se refieren a dos objetos nos dan relaciones. " H es abuelo de R " da la relación " ser abuelo " entre personas; " 20 es menor que 25 ", la relación "menor" entre números. Otra importante relación entre números que se llama "sucesor" es la que existe entre cada número natural y el siguiente:"20 tiene por sucesor a 21".

Si a cada relación le ponemos como nombre una letra o cualquier otro símbolo, necesitaremos dos letras más para designar los dos objetos a que se refiere la relación. Así, si a la relación "es abuelo de" la representamos por A , escribiremos:

$$aAp$$

para simbolizar " a es abuelo de p ", donde a y p son los nombres de dos personas.

Si N simboliza "es la capital de",

$$rNm$$

se lee " r es la capital de m ", donde r es el nombre de una ciudad, y m el nombre de un país.

Si a y b son números y S simboliza la relación de ser el siguiente o sucesor,

$$aSb$$

se leerá: " a tiene por sucesor a b ", o "el sucesor de a es b ".

La relación "es menor que" entre números se usa tanto que ya tiene su símbolo propio: " $<$ "

$$a < b$$

se lee " a es menor que b ".

Si a es 20 y b 21 la proposición que resulta "$20 < 21$" es verdadera. Si a es 21 y b es 20, la proposición " $a < b$ " significa $21 < 20$, lo cual es falso. Pero $21 < 20$ es, lo mismo, una proposición. Cada vez que formemos una de estas proposiciones con una relación y dos objetos, si es verdadera la escribiremos sin hacer ninguna aclaración:

$13 < 15$, . Napoleón murió en 1819 .

En cambio, si es falsa lo diremos explícitamente:

$10 < 5$ es falsa ; Napoleón murió en 1900 es falsa .

En símbolos, si R es una relación y a y b dos objetos, aRb a secas, significará que aRb es verdadera.

Si es falsa, lo diremos.

Primero y segundo sujeto de una relación

En todos los ejemplos dados, el orden de los dos objetos es importante; vamos a llamarlos primer sujeto y segundo sujeto de la relación y tiene que estar claro cuál es el primero y cuál el segundo.

Al escribir pondremos siempre el primero a la izquierda y el segundo a la derecha del símbolo de la relación. Los dos sujetos forman un par ordenado.

En $20 < 21$, el par ordenado está formado por 20 y 21 , en ese orden, y se lo escribe así: (20, 21).

En "Miguel es abuelo de Pablo" el par ordenado es (Miguel, Pablo). Pero obsérvese que una relación como "abuelo" puede expresarse de dos maneras, " x es abuelo de z " ó " z tiene por abuelo a x ", que representan la misma idea, pero con los sujetos ordenados al revés. Por lo tanto habrá que aclarar siempre a cuál de las dos nos referimos.

Satisfacer una relación

Formemos una proposición con la relación "desembocar en" y el par de sujetos (río Negro, Atlántico):

El río Negro desemboca en el Atlántico.

Ésta es una proposición verdadera. Se dice, entonces, que el par (río Negro, Atlántico) satisface o verifica la relación "desembocar en". Si, en cambio, formamos la proposición con el par (Amazonas, Mediterráneo):

El Amazonas desemboca en el Mediterráneo

ha resultado una proposición falsa. Este par no satisface la relación "desemboca en". Tampoco el par (Atlántico, río Negro) la satisface: el Atlántico no desemboca en el río Negro.

Cuando se pregunta si un par satisface una relación éste debe venir ordenado. ¿Satisface el par: (Tierra, Luna) la relación "es satélite de" ? ¿ Y el par (Luna, Tierra)? ¿Algunos de estos pares : (Tierra, Júpiter) , (Marte Neptuno), (Neptuno, Marte), (Venus, Júpiter) satisface la relación "más grande que" ?

Busca algunos pares de personas, entre las que conoces, que verifique la relación "es compatriota de" y otros que no la verifiquen. Si "nació en" se toma como una relación entre personas y países , dar tres ejemplos que la verifiquen y tres que no la verifiquen.

Se dice siempre que una relación hace corresponder el segundo sujeto al primero.

Por ejemplo en la relación "desemboca en", al río Negro le corresponde el Atlántico, al Danubio el mar Caspio, al Amazonas también el Atlántico.

Por eso las relaciones se llaman también correspondencias.

Ejemplos de relaciones matemáticas

La inclusión de conjuntos es otra relación cuyo símbolo conocemos:

$A \subset B$

tiene como primer sujeto al conjunto A incluido en el segundo, B.

También $\subsetneq$, $\supset$ y $\supsetneq$ son relaciones entre conjuntos.

La igualdad es una relación de gran importancia en matemática; puede referirse a conjuntos, a números y a muchas otras cosas. En este caso se trata de una relación simétrica:

Si $a = b$ también $b = a$.

De modo que aquí el orden de los dos sujetos no tiene importancia. Pero la mayoría de las relaciones no son simétricas. Por eso, como ya dijimos, es esencial saber cuál de los dos sujetos es el primero.

La perpendicularidad entre rectas es una relación que se simboliza por " $\perp$ " . Si a y b son nombres de rectas,

$a \perp b$

significa " a es perpendicular a b "

¿Es simétrica o no? sí

La pertenencia - símbolo: $\in$ - es también una relación entre un objeto, el primer sujeto, y un conjunto, el segundo sujeto.

$a \in B$

es una relación entre a y B .

No es simétrica. no

Una relación útil y fácil es el producto cartesiano de dos conjuntos:

Si A y B son dos conjuntos, esta relación se simboliza $A \times B$, y un objeto p está en la relación $A \times B$ con otro q simplemente si p está en A y q está en B :

$p\, A \times B\, q$

significa $p \in A$ y $q \in B$.

Los pares que satisfacen esta relación son todos los formados por un elemento de A y uno de B , en ese orden.

Si A tiene n elementos y B tiene m , hay exactamente nxm pares de esos. Por eso la relación se llama producto .

Las negaciones de relaciones son también relaciones.

"No es abuelo de" es una relación entre personas tan bien definida como "es abuelo de". Si a esta última la simbolizamos con A , es frecuente simbolizar a su negación con

$\not A$, o también $\sim A$

Así, a las negaciones de las relaciones $=$, $\in$, $\subset$, ya las hemos simbolizado:

$\neq$, $\notin$, $\not\subset$.

La negación de $<$ entre números puede escribirse $\not<$. Pero si

$a \not< c$

porque a es igual o mayor que c .

La relación "mayor o igual" se simboliza siempre $\geqslant$. Entonces $\not<$ es lo mismo que $\geqslant$.

$<$, $\leqslant$, $>$, $\geqslant$, son relaciones entre números.

Definir una relación

¿ Cuándo diremos que una relación está bien definida?

Al hablar de conjuntos se dijo que un conjunto está bien definido cuando se puede decir de un objeto cualquiera si pertenece o no a él.

Las relaciones se refieren a un par ordenado de objetos: dos objetos que llamamos primero y segundo sujeto.

Una relación está bien definida si se puede decir de cualquier par ordenado, si satisface la relación o no.

La relación $<$ está bien definida, porque cualquiera sea el par ordenado de números que se elija (3, 8), (9, 1), etc., siempre puedo decir si ese par satisface la relación $<$ o no. Y si alguno de los objetos no es un número, seguro que no la satisface.

Pero un par como (3, 8) satisface la relación $<$ si la proposición "3 es menor que 8" es cierta. Un par ordenado satisface una relación si la proposición que se forma con la relación y ese par, es verdadera.

Por lo tanto:

Una relación R está bien definida si, para cualquier par ordenado de objetos, (v, w) se puede decir si la proposición vRw es verdadera o no.

Veamos qué precauciones hay que tomar para que una relación esté bien definida, para que no haya dudas sobre cuáles son los pares de sujetos que la satisfacen.

La relación "es abuelo de", ¿está bien definida?

Vamos a admitir que siempre es posible averiguar si una persona es abuela de otra. Entonces de cualquier proposición como "Juan es abuelo de Pedro" (formada con un par de personas y la relación) se podrá decir si es verdadera o no. O sea, "es abuelo de" es una relación bien definida.

Sin embargo aparece esta duda: ¿aceptaremos que un animal se llama abuelo de otro o reservaremos esta palabra solo para personas? Cualquiera de las dos cosas se puede hacer; eso dependerá del asunto que se esté tratando. Pero lo que pide la Matemática es que se diga explícitamente en cada caso si la relación se aplicará solo a personas o también a animales; si no, no se podrá decir cuáles son los pares de sujetos que la satisfacen.

La relación $<$, o sea "es menor que", se usa en general entre números, pero también es usual decir "Juan es menor que Pedro", refiriéndonos a la edad.

¿Escribiremos eso : "Juan $<$ Pedro" ? Si nos resulta útil, sí, pero entonces tenemos que aclarar que vamos a usar $<$ para relacionar personas según sus edades.

Aun si nos limitamos a los números, como hay distintas clases de números (naturales, enteros, fracciones, etc.), hay que decir si la relación $<$ se va a usar para cualquiera de ellas o solo para números naturales o fracciones, etc.

Con la relación $=$ sucede lo mismo. Hay que decir si se refiere a números, a conjuntos o a objetos en general. Los pares que satisfacen la igualdad entre números son pares de números y los que satisfacen la igualdad entre conjuntos, son pares de conjuntos.

Se ve, entonces, que una de las precauciones que debe tomarse para que una relación esté bien definida es aclarar con qué extensión o alcance se va a usar.

Ejercicio

I) Definir bien las relaciones:

a) "ser primo de"
b) "desembocar en"
c) "amar a"
d) "ser múltiplo de"
e) "ser paralelo a"
f) "ser profesor de"
g) "ser más lento que"
h) "ser semejante a"

Alcance y rango de una relación

Nos dan una relación, como " p es la capital de q ", y nos interesa averiguar qué pares de objetos satisfacen esa relación. Para eso no hace falta probar con todos los pares de objetos. Si p es un perro o si q es un número, es evidente que la proposición " p es la capital de q " es falsa (y además ridícula). Solo vale la pena probar con ciudades y países.

Es muy común que en una relación los posibles primeros sujetos no sean todos los objetos del universo sino que sea suficiente considerar un conjunto especial (como las ciudades), que llamaremos el "alcance" de la relación. Para los segundos sujetos el conjunto análogo se llama el rango de la relación.

Al dar el alcance y el rango, aclaramos y simplificamos la tarea de averiguar cuáles son los pares que satisfacen la relación, pero atención, lo importante es conocer estos pares.

El alcance es, pues, un conjunto en el que ponemos todos los posibles primeros sujetos de la relación.

El rango está formado por todos los segundos sujetos que nos interesa considerar.

Si en "abuelo de" reunimos los dos géneros, (abuelo o abuela), el alcance y también el rango de "ser abuelo", es el conjunto de todas las personas. Si hacemos la diferencia de géneros, "ser abuelo" tiene por alcance $\{$todos los varones$\}$ y por rango $\{$todas las personas$\}$.

En " a es el marido de b " el alcance es $\{$ varones $\}$ y el rango $\{$ mujeres $\}$.

En la relación " a es la capital de b " el alcance es el conjunto $\{$ciudades$\}$ y el rango es $\{$países$\}$. Podríamos también limitar el alcance a $\{$ciudades importantes$\}$.

$\in$ es una relación entre un elemento y un conjunto. El alcance de $\in$ comprende a todos los elementos y el rango a todos los conjuntos.

$\subset$ tiene por alcance todos los conjuntos y por rango, también.

Si aSb significa "el número siguiente de a es b " entonces el alcance y el rango de S podrían coincidir con N.

También podemos tomar N como alcance y rango de las relaciones:

" a es el triple de b ",
" a es la mitad de b ".

Pero entonces no sería cierto que " 3/2 es la mitad de 3 ", pues $3/2 \notin$ N. Por lo tanto, si necesitamos hablar de la mitad de 3, hay que darle a la relación "mitad", un alcance más amplio que N.

Para la relación $\perp$ hay que fijar el alcance y el rango en cada caso.

Podemos referirnos solo a rectas. Entonces tanto el alcance como el rango de $\perp$ es $\{$todas las rectas$\}$.

Pero también una recta puede ser perpendicular a un plano: una columna por ejemplo, marca la dirección de una recta $\perp$ al piso.

Y cada una de las paredes laterales de una habitación y el piso de la misma son planos perpendiculares.

Si perpendicular se refiere a rectas perpendiculares a planos, o planos perpendiculares a rectas, su alcance y su rango es $\{$todas las rectas y todos los planos$\}$. En cambio si nos limitáramos a hablar de planos perpendiculares, alcance = rango = $\{$todos los planos$\}$.

¿Cuál es el alcance y el rango si en $\perp$ queremos abarcar todos estos casos?

El alcance de un producto cartesiano $A \times B$ es A . El rango es B .

Dominio e imagen de una relación

En el alcance de una relación R hay objetos para los cuales la relación nunca se satisface: al ponerlos como primeros sujetos no dan una proposición verdadera con ningún segundo sujeto.

Por ejemplo hay ciudades que no son capitales de ningún país, y personas que no son abuelos de nadie.

Estos objetos no están en el dominio de la relación.

El dominio está formado por aquellos elementos del alcance que "satisfacen" la relación, con algún segundo sujeto adecuado (o varios).

Cuando la proposición aRb es verdadera, decimos que a está en el dominio de R y b está en la imagen.

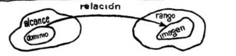
En la imagen reunimos, pues, los elementos del rango que satisfacen la relación alguna vez.

Hay por ejemplo, lagos en los que no desemboca ningún río. Estos lagos pueden estar en el rango de la relación "desemboca" pero no en la imagen

En la relación " a es satélite de b " el rango es todos los astros pero los que no tienen satélites no están en la imagen. Hay números naturales que no tienen mitad en $\underline{N}$: los impares. Ellos están en el rango de la relación "es la mitad de" pero no pertenecen a la imagen.

El dominio es un conjunto incluido en el alcance.

La imagen es un conjunto incluido en el rango.



El dominio y la imagen de una relación R se simbolizan así:

$\mathscr{D}$(R) que se lee "dominio de R",
Im(R) que se lee "imagen de R".

El dominio de $\in$ es I . ¿Por qué?
Para decir cuál es la imagen de $\in$ tenemos que recordar que $\emptyset$ no tiene elementos. Si escribimos $x \in \emptyset$, esto es falso, pues no hay ningún elemento x que cumpla esta relación. $\emptyset$ nunca es segundo sujeto en la relación $\in$. La imagen de $\in$ está formada por todos los conjuntos, a excepción de $\emptyset$: imagen de $\in \neq$ rango de $\in$. Si la relación $<$ se refiere a números naturales, su alcance y su rango son $\underline{N} = \{1, 2, \dots\}$. En ese caso, el dominio de $<$ es también $\underline{N}$, pues todo número natural es menor que algún otro natural. $\mathscr{D}(<) = \underline{N}$
En cambio (también para números de $\underline{N}$) la relación "mayor que" simbolizada por "$>$" no tiene como dominio todo $\underline{N}$ pues el número 1 no es mayor que ningún otro:

$1 > a$

no es verdad para ningún número natural a . El dominio de $>$ es $\{2, 3, \dots\} \neq \underline{N}$. $\mathscr{D}(>) = \underline{N} \sim \{1\}$.
Con las imágenes de $<$ y de $>$ pasa al revés. La imagen de $<$ es $\{2, 3, \dots\}$, pues no hay ningún número a en $\underline{N}$ tal que $a < 1$. En cambio hay muchos números mayores que 1 y que 2 y que cualquier número natural. La imagen de $>$ es todo $\underline{N} = \{1, 2, \dots\}$. $\mathrm{Im}(<) = \underline{N} \sim \{1\}$. $\mathrm{Im}(>) = \underline{N}$.
¿Cómo son el dominio y la imagen de $\leqslant$ y $\geqslant$? $\underline{N}$
Para el producto cartesiano de dos conjuntos $A \times B$, dominio = alcance = A , e imagen = rango = B .
Si C es la relación "ser capital de", entonces:

alcance de C = {ciudades} ,
$\mathscr{D}$(C) = {ciudades capitales} ,
rango de C = Im (C) = {países} .

Si M es la relación "ser marido de", entonces:

alcance de M = {varones} ,
$\mathscr{D}$(M) = {varones casados} ,
rango de M = {mujeres} ,
Im(M) = {mujeres casadas} .

Si $a E_D b$ significa "a es la edad de b" , en años, entonces el rango puede ser {hombres} o {animales} o {árboles} o {edificios} ; depende del asunto que estemos tratando. Supongamos que es {hombres} .
El alcance es $\underline{N}$.
Im (E) = rango de E = {hombres} , pues cada hombre tiene alguna edad.
$\mathscr{D}(E) \neq \underline{N}$ con toda seguridad, pues, por ejemplo,

$1.000.000 \notin \mathscr{D}(E)$,

no hay ningún hombre que tenga un millón de años. Pero sería difícil decir exactamente cuál es $\mathscr{D}$(E) ¿Hay alguna persona de 150 años de edad?

Para casos como éste es que no hay más remedio que hablar de dominio y alcance, aunque sería tanto más cómodo poder hablar solo de dominio.

El dominio de la inclusión, $\subset$, está formado por todos los conjuntos, pues cualquier conjunto está incluido en algún conjunto, por ejemplo, en él mismo o en I. En esta relación, el dominio y el alcance son iguales.

Si A es un conjunto cualquiera, ¿ hay siempre otro conjunto incluido en A ? Sí, por lo menos el mismo A . O sea, la imagen de $\subset$ es un conjunto formado por todos los conjuntos. La imagen de $\subset$ es igual al rango .

¿De qué manera se pueden definir relaciones?

Muchas se definen como hemos visto coloquialmente, es decir con descripciones comunes, no matemáticas, como "es abuelo de" "desemboca en" , "es dueño de" , "nació en" , "vive en" , "va a examen en" , "para ir al colegio toma" , "tiene miedo a" . Recordemos que además es preciso decir explícitamente, en cada caso, con qué alcance y rango se va a definir la relación.

Relaciones dadas en tablas. Imagen de cada punto del dominio.

Cuando no se trata de relaciones tan conocidas es más importante decir cuáles son los pares de elementos que la satisfacen , con lo cual, de paso, tenemos el dominio y la imagen.

Las relaciones dadas de esta manera se expresan mejor con tablas: en la primer columna se escriben los elementos del dominio - primeros sujetos - y en la otra, a la derecha, y en la misma línea de cada elemento del dominio, todos los segundos sujetos que satisfacen la relación con él.

Si queremos dar la relación K entre los barcos a, b, c, de una compañía de navegación y los puertos en los cuales hacen obligatoriamente escala en sus travesías, tendríamos una tabla de este tipo:

K : "hace escala en" dominio	imagen
a	Santos, Nueva York, Buenos Aires
b	Montevideo, Santos, Río, Buenos Aires
c	Montevideo, Buenos Aires

El dominio de K , $\mathcal{D}$(K) es el conjunto $\{a, b, c\}$.

Im(K) = {Montevideo, Santos, Nueva York, Río, Bs. As.}

De los elementos de Im(K) , algunos satisfacen la relación K con a : ellos forman la imagen de a según K , o la imagen de a por K : Im(a) .

Im(a) = {Santos, Nueva York, Bs. As.}
Im(b) = {Montevideo, Santos, Río, Bs. As.}
Im(c) = {Montevideo, Bs. As.}

La imagen de cada punto del dominio es un conjunto de uno o más elementos.

También suele escribirse la imagen de un elemento del dominio así:

K a o K(a)

(se pone a entre paréntesis si se teme que pueda confundirse K a con el producto de dos símbolos).

Al escribir K a en vez de Im(a) , se indica cuál es la relación que se está usando.

Recordemos que se dice que la relación K hace corresponder a cada punto a de su dominio el conjunto K a , su imagen, y que por eso las relaciones se llaman también correspondencias.

En las tablas se ve inmediatamente el dominio y la imagen de la relación. Pero, ¿cuál es el alcance y cuál el rango de K ?.

En el ejemplo anterior el rango está formado por los puertos entre los cuales la compañía puede elegir para que hagan obligatoriamente escala sus barcos. El alcance es el conjunto de todos los barcos de la compañía.

Si al hacer la tabla, por un motivo cualquiera, faltara aún resolver para un barco d qué puertos va a tocar, d pertenece al alcance de K pero no a $\mathfrak{D}$(K) . d puede estar o no en la primera columna de la tabla, pero, si figura, no habrá a su lado, en la segunda columna, ningún elemento, pues no tiene imagen según K.

Si un elemento d no está en el dominio de una relación K podemos decir que la imagen de d por K es vacía: K d = $\emptyset$.

Tablas de una relación son las planillas de calificaciones.

En una columna están los elementos del dominio - los alumnos de tal escuela y división - y a la derecha de cada uno, las notas del período - en Matemática, por ejemplo. Esta tabla define una relación N que podemos llamar "notas de matemática".

El alcance de N está formado por todos los alumnos inscriptos en esa división. Si alguno, por algún motivo, no ha sido calificado en ese período, aunque está en el alcance no está en el dominio. La imagen de ese alumno según N es vacía. No le corresponde ninguna nota.

¿Cuál es el rango de N ? El conjunto de todas las notas posibles: los números de 0 a 10. Evidentemente, el rango puede o no coincidir con la imagen de N : tal vez nadie ha sacado 0, o más probablemente, nadie sacó 10 .

Si un profesor ha fabricado una de esas planillas de calificaciones y no le ha puesto ningún título, quien la vea no podrá saber por la planilla solamente qué tienen que ver los nombres de la lista con los números que figuran al lado. Pero aunque no se sepa qué tienen que ver los números con las personas, se sabe qué números le corresponden a cada persona. La planilla, aunque le falte el título es una relación perfectamente definida.

Para definir la relación T puedo mostrar la siguiente tabla:

dominio T	imagen
Aconcagua	5000 , 6000 , 7000
Marte	Júpiter, 6000

Aconcagua está en la relación T con 5. 000 , también con 6. 000 , también con 7. 000; Marte, con Júpiter y con 6. 000 .

No hay que pensar que si no se aclara qué es T , la relación no está definida. Recordemos otra vez que para la Matemática , una relación está definida cuando se sabe exactamente cuáles son los pares de sujetos que la satisfacen. El cuadro cumple totalmente con esta exigencia.

Nos dice:

"Aconcagua T 5. 000" , "Aconcagua T 6. 000" , "Aconcagua T 7. 000" , "Marte T Júpiter" , "Marte T 6. 000", son proposiciones verdaderas y que cualquier otra proposición formada con T y dos sujetos es falsa.

¿Qué significa T ? ¿Qué significan estas proposiciones?

Eso no hace falta decirlo. Yo que he hecho la tabla sé lo que significa T para mí, pero eso no es un problema matemático . La Matemática nos enseña a usar relaciones, independientemente de su significado; por eso, justamente, es que sus resultados se pueden aplicar a cualquier ciencia y a cualquier situación.

En muchos casos no interesa construir la tabla completa de una relación y se limita su alcance. Por ejemplo, la tabla del 12 es la de la relación " a multiplicado por 12 es b " , que podemos simbolizar por M . Como alcance puede tener todo N ; en este caso ni siquiera es posible hablar de una tabla completa. Pero tampoco interesa, a veces, darle un alcance largo. Para aprenderla de memoria, como en la escuela , se fija el alcance $\{1, 2, \ldots, 12\}$.

12	
1	12
2	24
:	:
12	144

Ejercicios

2.- a) Cuál es la tabla de la relación: "el país x posee importantes minas de y " , con alcance = { países de América del Norte } .
b) La tabla de "es capital de" , alcance: {países de América Central} .
c) La de "para ir al colegio toma" con alcance {cinco de tus compañeros} .
d) Tabla de "sucesor", alcance $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.
e) Tabla de la relación "es múltiplo de", con alcance = $\{1, 2, 3, \ldots, 12\}$.
f) Tabla del producto cartesiano de A y B , siendo A = $\{a, b, c\}$ y B = $\{f, b\}$.

Relaciones dadas por fórmulas

Muchas de las relaciones que usaremos en este curso están dadas por conceptos o fórmulas aritméticas y algebraicas.

Así la relación "múltiplo de", que simbolizaremos con la letra griega μ (mu) :

$n \mu m$

se lee: " n es múltiplo de m " .

Esta relación se refiere a números naturales; a veces se incluye el 0 ; si no queremos incluirlo el alcance y rango de μ son iguales a $\underline{N} = \{1, 2, \ldots\}$.

μ se define así: Dados dos números naturales n y m distintos de 0 , n es múltiplo de m si y solo si hay un número natural r tal que $n = m \times r$.

En símbolos: para $n \in \underline{N}$ y $m \in \underline{N}$, $n \mu m$ si y solo si $n = m \times r$ para algún $r \in \underline{N}$.

El dominio de μ es $\underline{N} = \{1, 2, \ldots\}$ pues cualquiera de estos números resulta ser, por lo menos, múltiplo de sí mismo y de 1 .

	μ
1	1
2	1, 2
3	1, 3
4	1, 2, 4
⋮	⋮

Si a es múltiplo de b , b es divisor de a ; cada número es múltiplo de sus divisores - y solo de ellos. Entonces la imagen de un número n está formada por todos sus divisores, entre ellos, n y 1 .

Así:

$$\mu 1 = \{1\} \quad ; \quad \mu 2 = \{1, 2\} \quad ; \quad \mu 6 = \{1, 2, 3, 6\}$$

$$\mu n = \{\text{divisores de } n\}$$

Todo número de $\underline{N}$ tiene que estar en la segunda columna de la tabla. La imagen de todo el dominio es $\underline{N}$. ¿Por qué?

Llamemos $\underline{N}_0$ a los números naturales más el 0 : $\underline{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\} = \underline{N} \cup \{0\}$.

Si el alcance de "múltiplo de" es $\underline{N}_0$ diremos que:

Dados dos números de $\underline{N}_0$, n y m , n es múltiplo de m si y solo si hay algún número r de $\underline{N}_0$ tal que $n = m \times r$.

La definición, salvo en el alcance y el rango, coincide con la anterior. ¿Cuál es su tabla? Por lo pronto 0 está en el dominio, pues si en $m \times r = n$, r puede ser 0 , tendremos que:

$$m \times 0 = 0$$

0	0, 1, 2, ...
1	1
2	1, 2
3	1, 3
⋮	⋮

0 es múltiplo de cualquier número: $Im(0) = \underline{N}_0$.

Consideremos otro número de $\underline{N}_0$, por ejemplo, 10.¿De qué números es múltiplo 10 si nos permiten incluir el 0 ? .

En $n = m \times r$, si el producto tiene que dar 10 : $10 = m \times r$, da lo mismo que se pueda usar o no el 0 . 10 es múltiplo de los mismos números si se incluye o no el 0 . Y lo mismo pasa con cualquier número distinto de cero. Todos tienen la misma imagen en las dos tablas; éstas son bastante parecidas pero no son iguales.

Al variar el alcance de "múltiplo", ha variado la tabla. Volveremos a hablar de esto más adelante.

Otro ejemplo: Digamos que dos números n y m están en la relación D , si su producto es menor que 100: $n \times m < 100$. O sea:

$$nDm \iff n \times m < 100$$

Todavía no está bien definida D si no decimos de qué números estamos hablando, cuál es el alcance y el rango de D . Si uno y otro son iguales a $\underline{N} = \{1, 2, \dots\}$ todos los números de 1 a 99 pertenecen con seguridad al dominio, pues si a cualquiera de ellos lo multiplicamos por 1 el producto es menor que 100.

Si admitimos el 0 , $\mathcal{D}(D)$ está formado por todos los números naturales con el 0 . $\{0, 1, 2, \dots\} = \mathcal{D}(D)$.

En efecto, por grande que sea un número, multiplicado por 0 da menos que 100.

Ejercicios

3) Para el primer caso, hallar la imagen de 1, 2, 3, 33, 49, 99.
49 49 33 3 2

1 4) Otro ejemplo: la relación E entre números naturales incluido el 0 ; (es decir, alcance y rango de E = $\underline{N}_o$) definida por:

$$nEm \iff 2n + m = 7$$

0 - 7
1 - 5
2 - 3
3 - 1

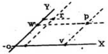
¿Cuál es $\mathcal{D}(E)$ y la imagen de cada punto del dominio?

Relaciones dadas por gráficos

Otra manera usual de definir relaciones es gráficamente.

Recordemos primero a qué se llama coordenadas de un punto del plano.

Sean dos ejes rectos X e Y y un punto p . Si por p trazamos una paralela a Y , ésta corta al eje X en v . La paralela a X por p corta a Y en w .



Cada punto de X representa un número: su distancia al origen o , y lo mismo los puntos de Y . Sea por ejemplo:

distancia de v al origen = 5 unidades ,
distancia de w al origen = 3 unidades.

Los dos puntos v, w o sus distancias 5 y 3 al origen se llaman coordenadas de p :

5 es la primera coordenada o abscisa de p
3 es la segunda coordenada u ordenada de p .

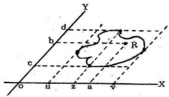
Cuando se dan las coordenadas de un punto, primero se nombra la abscisa, y se encierran las dos en un paréntesis.

Si (6, 1) son las coordenadas de un punto s , 6 es la abscisa y 1 la ordenada.

Al revés, cada par ordenado de números se puede representar por un punto: el que tiene esos dos números como primera y segunda coordenada.

Por ejemplo, el par (1, 4) representa r . r se obtiene trazando por el punto 1 de X la paralela a Y , y por el punto 4 de Y la paralela a X : el punto en que esas dos rectas se cortan es r .

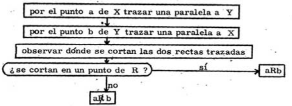
Dibujemos en el plano un conjunto R y dos ejes rectos y con



esto definimos la siguiente relación, que llamaremos, también, R :

aRb

si las coordenadas de algún punto de R son justamente a y b . Las instrucciones exactas para saber si aRb , las podemos dar con un sencillo diagrama.

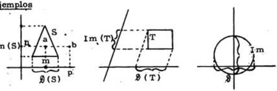


Trazando por cada punto de R paralelas a ambos ejes obtenemos todos los pares de sujetos de la relación R . La abscisa es el primer sujeto del par, y la ordenada, el segundo.

Rz , la imagen de un punto z por R , es el conjunto de los segundos sujetos que satisfacen R , con z como primer sujeto. O sea, está formada por las ordenadas de los puntos de R que tienen por abscisa z . Rz se "ve" cortando R con la paralela a Y por z : es el segmento de extremos c y d , obtenidos como se ve en la figura.

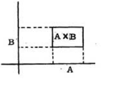
El alcance de R es todo X pero el dominio es solo el segmento de extremos u y v pues, fuera de éste, ningún otro punto de X está relacionado con puntos de Y de esta manera. Expresarlo claramente usando la definición de dominio. El rango de R es Y . ¿Cuál es Im(R) ?

Ejemplos



Las relaciones entre números se pueden, en principio, representar gráficamente.

Si, dada una relación R , se representa cada par ordenado de números (a,b) que la satisface (a pertenece al dominio; b , a la imagen) , por el punto que tiene por abscisa a y por ordenada b , el conjunto de todos los pares numéricos que satisfacen R estará representado por un conjunto de puntos: éste se llama representación gráfica de R

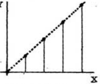


Si X e Y son los dos ejes de coordenadas, el gráfico de la relación X X Y (producto cartesiano) es todo el plano, pues todo punto del plano tiene su abscisa en X y su ordenada en Y . Si $A \subset X$ y $B \subset Y$, el gráfico de $A \times B$ es el "rectángulo" indicado en la figura.

En R , a un número del dominio pueden corresponder varios en la imagen. Entonces en la representación gráfica de R , habrá varios puntos con la misma abscisa y ordenadas diferentes.

Si queremos representar la relación a = b con alcance N_0 : todos los pares de números iguales como (2,2) , (10,10) , etc. satisfacen la fórmula.

Por lo tanto $a = b$ tiene por representación gráfica el conjunto de puntos que tiene igual abscisa que ordenada, siendo ambas números naturales. El gráfico es un conjunto de puntos separados, que están en la bisectriz del ángulo formado por los ejes X e Y .

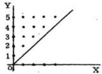


Gráficos de la relación $<$

$a < b$	a y $b \in \underline{N}_0$
0	1, 2, 3, . .
1	2, 3, . . .
2	3, 4, . . .
3	4, 5, . . .
4	5, 6, . . .

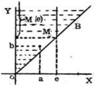
En este caso los pares ordenados de números que satisface $<$ como (1, 4) , (2, 3) , etc., tienen el primer número menor que el segundo.

La representación gráfica es el conjunto de puntos que tiene la abscisa menor que su ordenada. Todos ellos están encima de la bisectriz del ángulo recto de lados X e Y .



Mientras se habla solo de números naturales, las representaciones gráficas son conjuntos de puntos separados. Pero si admitimos todos los números reales positivos (o sea además de los naturales, las fracciones y también los números que no son fracciones como $\sqrt{2}$, π , etc.), el gráfico de $<$ tiene por dominio todo el semieje positivo de X, y estará formado por todos los puntos que están sobre la bisectriz.

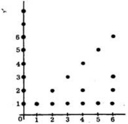
$a < b$ a y b reales (positivos) tienen por gráfico M . Efectivamente, todos los puntos que tienen su abscisa menor que su ordenada están en M y solamente ellos pertenecen a M .



Hay que aclarar que la bisectriz B está fuera de M , pues los puntos de B tienen sus dos coordenadas iguales. Si $M \supset B$, la relación que se define no es $<$ sino $\leqslant$.

La imagen de un punto e , como antes dijimos, está formada por las ordenadas de los puntos de M que tienen abscisa e , se obtiene, como siempre, a partir de la intersección de M con la paralela a Y trazada por e . Me es la imagen de e .

La relación μ (múltiplo de) para naturales incluido el 0 se representa como se ve en la figura. El conjunto μ está formado por los puntos gruesos y los que faltan a la derecha de 6 . Verificarlo.



Ejercicios

5) Hacer el gráfico de la relación D , de alcance = rango = = N definida por aDb si y solo si $3a > b-4$, con dominio = $\{1, 2, 3\}$.

6) Si y solo si R y S son dos relaciones, y pRq y al mismo tiempo pSq , diremos que p y q están en la relación "R y S"; en símbolos: p(RyS)q . Así, si y solo si "Juan es más gordo que Pedro" y "Juan es más alto que Pedro" , entonces " Juan es más alto y más gordo que Pedro".

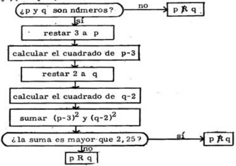
Supongamos ahora que R y S están dadas gráficamente. Demostrar que el gráfico de la relación "RyS" es $R \cap S$ (tal como ocurría con propiedades).

7) Análogamente al ejercicio anterior, definir la relación "R o S" y ver que su gráfico es $R \cup S$.

8) El gráfico de $\not R$ es $\sim R$.

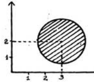
Relaciones dadas por diagramas de flujo

Las instrucciones para averiguar si un par de objetos (p, q) satisface una relación R , pueden estar dadas por un diagrama de flujo, por ejemplo:



En este caso, el diagrama no es más que la explicación de la fórmula:

$$(p-3)^2 + (q-2)^2 \leq 2,25$$



Puede además verse, buscando varios pares de números que satisfagan la relación, que su gráfico es el círculo cuyo centro tiene coordenadas 3 y 2 , y de radio 1,5 ($1,5^2 = 2,25$).

Relaciones iguales

Hemos mencionado antes que la relación $\nless$ ("no es menor que") es la misma que $\geqslant$. Está claro lo que queremos decir pero conviene formalizarlo. ¿Cuándo diremos que dos relaciones R y S son "la misma" o son iguales ? Cuando sean verdaderas para los mismos pares de sujetos , o sea:

$$R = S$$

significa que un par (a,b) satisface a R si y solo si satisface también a S .

Nótese que en esta definición de igualdad solo se tienen en cuenta los pares que satisfacen las relaciones, o sea los puntos del dominio y la imagen. No hablamos, en cambio, del alcance y el rango.

O sea, R y S podrían tener diferente alcance o rango y, sin embargo, ser iguales. Pero, a veces, también interesa tener en cuenta el alcance y el rango y entonces se agrega a la definición de igualdad la condición de tener igual rango o alcance. Por supuesto que en ese caso la palabra "igualdad" significará otra cosa que ahora, y habrá que decirlo explícitamente.

Dos relaciones R y S que se satisfacen para los mismos pares de sujetos:

1º) tienen el mismo dominio: $\mathfrak{D}(R) = \mathfrak{D}(S)$

2º) cada elemento a del dominio tiene la misma imagen por ambas relaciones: Ra = Sa .

(Observemos de paso que estamos usando la palabra "igual" y su símbolo en dos sentidos: al escribir $\mathfrak{D}(R) = \mathfrak{D}(S)$ ó Ra = Sa se trata de igualdad de conjuntos, que ya hemos definido en un capítulo anterior. Pero R = S es una proposición que estamos definiendo recién ahora: igualdad entre relaciones).

Así las relaciones R y S dadas por tablas son iguales si las dos tablas son idénticas. Si están dadas gráficamente, son iguales si los dos conjuntos que las representan coinciden. Para relaciones dadas por fórmulas o coloquialmente, a veces hay que trabajar un poco para saber si son iguales o no.

Por ejemplo, los pares de números que satisfacen estas dos relaciones:

$$(x+y)\times(x-y) < 4 \qquad y^2 + 4 > x^2$$

son los mismos; aunque no resulte de inmediato evidente.

Extensiones de relaciones

Queremos ver cómo son las tablas de las relaciones "es tío de" (tío o tía) y "es pariente de" con alcance {todas las personas que viven actualmente} . Estas son tablas prácticamente interminables; vamos a anotar los sobrinos y los parientes de unas pocas personas y, para abreviar, las llamaremos por letras: a , b , c , d .

T : "es tío de"

dominio	imagen
a	m, n, s
~~b~~	
c	f, g
~~d~~	

P : "es pariente de"

dominio	imagen
a	p, q, r, m, n, s, t, v
b	k, l, w
c	f, g
~~d~~	

a es tío de m, n y s . Tiene 3 sobrinos y varios parientes más.

b tiene parientes, pero no es tío de nadie; hay que sacarlo del dominio de T .

c es tío de f y g y éstos son los únicos parientes que tiene.

A la persona d la tacharemos en la segunda tabla porque no tiene parientes vivos; entonces tampoco puede figurar en el dominio de "es tío de" . Si no tiene parientes no tiene sobrinos.

Una de las maneras de construir estas dos tablas podría haber sido, hacer primero la T y luego copiarla tal cual y completarla hasta obtener la tabla de "pariente". Pues si de dos personas como a y m sabemos que a es tío de m , es seguro que a es pariente de m .

Si un par ordenado de personas satisface T , también satisface P .

Sean R y S dos relaciones y a y b dos objetos cualesquiera; si siempre que el par (a, b) satisface R , también satisface S , entonces se dice que S es extensión de R .

aRb $\Longrightarrow$ aSb (a y b objetos cualesquiera)

es la definición de que S es extensión de R .

Decir que S es extensión de R , es lo mismo que decir R es restricción de S .

Ser pariente es por lo tanto la extensión de "es tío" y además de todas las relaciones de parentesco: abuelo, hermano, etc. El alcance, en todos estos casos puede ser {todas las personas que viven actualmente} o {todas las personas} .

Si una relación como ser "abuelo" entre personas, se aplica también a animales, entonces "ser abuelo de" con alcance {personas y animales} se convierte en una extensión de la primera.

Notemos que estas dos últimas relaciones tienen el mismo nombre: "es abuelo de" y no son iguales: en los dos casos no son verdaderas para los mismos pares de sujetos.

La relación amigo es extensión de "amigo íntimo"

De las relaciones "amigo" y "pariente", ninguna es extensión de la otra.

"Es nieto de" es una restricción de "es descendiente"; "vive en la misma ciudad que", es restricción de "vive en el mismo país que".

La semejanza de polígonos es una extensión de la semejanza de triángulos.

Extensiones de relaciones matemáticas

Como vimos, si el alcance y el rango de "múltiplo de" son N, la relación no tiene la misma tabla que si ambos son N_0 :

μ	
1	1
2	1, 2
3	1, 3
⋮	⋮

μ_0	
0	0, 1, 2, ...
1	1
2	1, 2
3	1, 3
⋮	⋮

Éste es otro caso de relaciones que tienen el mismo nombre y no son iguales; vamos a representarlas con distintos símbolos. Si no incluimos el 0 llamaremos a "múltiplo de": μ , como antes; si lo incluimos, la simbolizaremos por μ_0 .

La diferencia de las dos tablas está en que 0 solo pertenece al dominio de la segunda. Pero todo par de números que satisface μ como (1,1), (2,1), (2,2), etc. , también satisfacen μ_0 . Entonces μ_0 es extensión de μ .

La relación = aplicada a números enteros y fraccionarios es una extensión de = aplicada solo a enteros. También son estas relaciones del mismo nombre y no iguales.

$<$ es extensión de sucesor, S :

$<$	
1	2, 3...
2	3, 4...
3	4, 5...
⋮	

S	
1	2
2	3
3	4
⋮	⋮

pues si n tiene por siguiente m entonces n es menor que m:

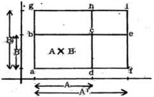
o, lo que es lo mismo, en símbolos: nSm $\Longrightarrow$ $n < m$.

A su vez $\leqslant$ es extensión de $<$ y por lo tanto también es extensión de S .

La relación $=$ entre números no es una extensión de la relación $=$ entre conjuntos, ni la segunda es una extensión de la primera.

Si $A \times B$ es el producto cartesiano de los conjuntos A y B , y $A' \supset A$, entonces $A' \times B$ es extensión de $A \times B$ pues $p \in A \Longrightarrow p \in A'$, de modo que $p\, A \times B\, q \Longrightarrow p\, A' \times B\, q$. Si $B' \supset B$, entonces $A \times B'$ es otra extensión de $A \times B$. En cambio $A' \times B$ no es extensión ni restricción de $A \times B'$. $A' \times B'$ es extensión de $A \times B$, de $A' \times B$ y de $A \times B'$. Gráficamente:

$A \times B$ es el rectángulo de vértices: a, b, c, d
$A' \times B$ es el rectángulo de vértices: a, b, e, f
$A \times B'$ es el rectángulo de vértices: a, g, h, d
$A' \times B'$ es el rectángulo de vértices: a, g, i, f



Extensiones de relaciones dadas por tablas o por gráficos

Si una relación está dada por una tabla es fácil extenderla . Por ejemplo, si R es:

R	
a	Pedro
3	Marte, D

y agrego uno o más elementos al dominio de R , no importa cuáles son sus correspondientes en la segunda columna, defino una relación R' que es extensión de R .

R'	
a	Pedro
3	Marte, D
este lápiz	12, 15

También si agrego uno o más elementos en la imagen de un punto de $\mathcal{D}(R)$, o de varios, la nueva relación R'' es extensión de R .

R''	
a	Pedro
3	Marte, D, Tierra

Y naturalmente, si hago las dos cosas, defino otra extensión de R, R'''.

Al confeccionar cualquiera de estas tablas, siempre he copiado todos los primeros y

	R'''
a	Pedro, E
b	Marte, D, Luna
V	3, VI, X

segundos sujetos de R ; por eso estoy seguro de que todo par que satisface R también satisface a R', R'', R''' : esto es todo lo que pide la definición de extensión de una relación.

Pero entonces, de acuerdo con la definición, la misma tabla R nos da una extensión de sí misma. Evidentemente: toda relación es extensión de sí misma.

Si S es extensión de R ¿cómo tienen que ser los dominios de S y R y las imágenes de cada punto del dominio en las dos relaciones?

Después de fabricadas unas cuantas extensiones vemos claro que el dominio de la extensión tiene por lo menos que ser igual al dominio de R ; diremos que tiene que incluirlo, con lo cual no descartamos el caso de dominios iguales:

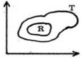
$$\mathfrak{D}(S) \supset \mathfrak{D}(R) \quad . \qquad (1)$$

Si a es un punto del $\mathfrak{D}(R)$ (y por consiguiente del $\mathfrak{D}(S)$), entonces la imagen de a en la extensión tiene, por lo menos, que ser igual a la imagen de a en R ; o sea, la incluye.

$$Sa \supset Ra \quad . \qquad (2)$$

Si y solo si se cumplen las condiciones (1) y (2), S es extensión de R .

Si R está dada por un gráfico es todavía más fácil extenderla: cualquier conjunto que incluye a R , como el T , es el gráfico de una relación extensión de R .



La relación T es extensión de la relación R si y solo si el conjunto T incluye al conjunto R. Demostrarlo.

En realidad, si S es extensión de R , aunque estas relaciones no se puedan representar gráficamente, los pares de sujetos que satisfacen S forman un conjunto que incluye a este otro: el de los pares que satisfacen R .

Esto sugiere usar el símbolo de la inclusión de conjuntos, $\supset$, para la extensión de relaciones.

En vez de decir "la relación R es extensión de la relación S", escribiríamos: R $\supset$ S .

Inversa de una relación

Supongamos que a es abuelo de b . Eso es cierto si y solo si b es nieto de a . Las relaciones "abuelo" y "nieto" son recíprocas o inversas una de la otra. Lo mismo sucede con otras relaciones

a es múltiplo de b si y solo si b es divisor de a . "Múltiplo" y "divisor" son relaciones inversas.

a es hermano de b si y solo si b es hermano de a (usando "hermano" sin distinción de sexo). "Hermano" podemos decir que es una relación inversa de sí misma.

Para cualquier relación R es fácil definir su inversa:

Llamamos inversa de una relación R a otra relación, que simbolizamos R^{-1}, dada por:

$\boxed{aR^{-1}b \text{ si y solo si } bRa}$.

O sea, un par (a, b) satisface la relación R^{-1} si y solo si el par ordenado al revés satisface R .

Si sabemos cuáles son los pares que satisfacen R sabemos entonces cuáles son los que satisfacen R^{-1} , o sea que R^{-1} también está bien definida.

Si R está dada por una tabla, ¿cómo se construye la tabla de R^{-1} ?

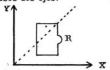
La única diferencia entre las dos es que el primer sujeto pasa a ser segundo y viceversa. Entonces en la primera columna de la tabla de R^{-1} ponemos todos los elementos que figuran en la segunda columna de la tabla de R , uno en cada fila. Y si r es uno de ellos, ponemos a su derecha todos los de la primera columna de R que aparecían en las mismas filas en que estaba r . Por ejemplo:

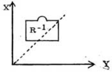
R	
a	r, a
b	c, a
d	c, r, b

R^{-1}	
a	a, b
b	d
c	b, d
r	a, d

Es evidente entonces que el dominio de R^{-1} es la imagen de R y viceversa, y que también alcance de R^{-1} = rango de R y rango de R^{-1} = alcance de R .

Si R está dada gráficamente, solo hay que cambiar entre ellos los ejes de abscisas y ordenadas: el eje que apunta hacia arriba debe quedar apuntando a la derecha y viceversa. Eso se consigue haciendo girar la figura alrededor de la bisectriz del ángulo formado por esos dos ejes:





La inversa de A×B es B×A : basta recordar la definición de producto cartesiano.

¿Y cuál es la inversa de R^{-1} ? Debemos llamarla $(R^{-1})^{-1}$, y hemos puesto paréntesis para indicar que lo que está encerrado en ellos es el nombre de una sola relación, aunque está formado por tres símbolos.

El par (a, b) satisface a la inversa de R^{-1}, por definición, si y solo si el par (b, a) satisface a R^{-1}. Pero esto último sabemos que ocurre si y solo si el par (a, b) satisface a R. Entonces los mismos pares satisfacen a R y a $(R^{-1})^{-1}$: estas dos relaciones son iguales.

La inversa de la inversa de R es R. Por eso podemos decir que R y R^{-1} son cada una inversa de la otra.

Ejercicios

9) Demostrar que la inversa de $<$ es $>$. En símbolos : $<^{-1} = >$.

10) ¿Cuáles son las inversas de: $\leqslant$, $\subset$.

11) La inversa de la relación de "sucesor" o "siguiente", S, se llama "antecesor" o "precedente", S^{-1}. Dar el alcance, rango, dominio e imagen de S^{-1}.

12) Extensión es una relación entre relaciones: si R y S son relaciones, " R es extensión de S " es una relación entre R y S. ¿Cómo se llama su inversa?

Capítulo VI

RELACIONES SIMÉTRICAS, TRANSITIVAS Y REFLEXIVAS

Una relación R se llama simétrica si para cualquier par de objetos es cierto que

$\boxed{aRb \Longleftrightarrow bRa}$

o sea que si un par de objetos cumple la relación, también la cumple el mismo par escrito al revés.

Ser iguales, ser hermanos, la semejanza entre triángulos, a es parecido a b , $a \perp b$, etc., son simétricas.

La inclusión, $\in$, $<$, $\leqslant$, μ , sucesor, etc., no son simétricas . Verificarlo.

Si R es simétrica, su dominio y su imagen coinciden. Demostrarlo.

Si R está dado por una tabla, para que sea simétrica se debe cumplir:

1°) los elementos de las dos columnas son los mismos,
2°) si un elemento r está en la primera columna y s está a su derecha, entonces cuando s aparezca en la primera columna, r debe figurar a su derecha.

a	a, b
b	a, c
c	b

es simétrica

a	a, b, c
b	a, c
c	b

no es simétrica

a	a, b
b	a
c	b

no es simétrica

Si R es una relación cualquiera podemos definir su negación como otra relación $\not R$, dada por:

x está en la relación $\not R$ con y si y solo si no está en la relación R con y , o sea, $x \not R y$ si y solo si es falso que $x R y$.

Es claro que una relación R es simétrica si y solo si $\not R$ es simétrica. 20

Ejercicios

1) Una relación R es simétrica si y solo si coincide con su inversa: $R = R^{-1}$. Demostrarlo.

2) Si han estudiado simetría en primer año podrán probar que la representación gráfica de una relación simétrica es un conjunto simétrico con respecto a la bisectriz de los ejes.

3) Si S es una relación cualquiera, las relaciones " S y S^{-1} " y " S o S^{-1} " son simétricas.

Algunas relaciones son transitivas : para cualquier par de objetos, es cierto que:

$\boxed{aRb \text{ y } bRc \Longrightarrow aRc}$.

<u>Esta propiedad es importante porque la poseen todas las ordenaciones</u>: por estatura, por edad, por orden alfabético, por jerarquía, por preferencia, por inclusión: si una cosa precede a otra y ésta precede a una tercera, la primera precede a la tercera.

$\subset$, $<$, $\leqslant$, κ son transitivas. También lo son la igualdad, la semejanza, ser compatriotas.

<u>Sucesor no es una relación transitiva</u>: el siguiente de 2 es 3, y el de 3 es 4, pero 4 no es el siguiente de 2. Ser abuelo no es transitiva: si Juan es abuelo de Pedro y Pedro es abuelo de Diego, Juan <u>no</u> es abuelo de Diego. ¿Ser hermanos es transitiva? Si a es hermano de b y b es hermano de c , ¿es a hermano de c ? Si $a \neq c$, sí. Pero si yo soy hermano de Juan y Juan es hermano mío, no se puede decir por eso que yo soy hermano mío.

Es que hermano no es una relación <u>reflexiva</u> ; nadie es hermano de sí mismo.

Diremos que una <u>relación R</u> es <u>reflexiva</u> si y solo si:

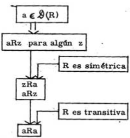
aRa es verdadera para todo elemento a de su dominio
$a \in \mathcal{D}(R) \Longrightarrow aRa$, o sea $a \in Im(a)$.

Son reflexivas: $\doteq$, $\leqslant$, $\geqslant$, $\subset$, κ .
No son reflexivas: $<$, $>$, $\perp$, $\in$, sucesor.

<u>Teorema</u>:

Toda relación que es simétrica y transitiva es reflexiva.

Sea R simétrica y transitiva; hay que demostrar que si a es un elemento cualquiera del dominio de R , entonces es cierto que aRa .



<u>Ejercicios</u>

4) La <u>extensión</u> es una relación entre relaciones. Decir cuáles son su alcance, rango, dominio e imagen. La extensión es transitiva y reflexiva.

5) La tabla siguiente es de una relación que no es ni simétrica ni transitiva. Dar las tablas de dos extensiones de ésta, tales que una de ellas sea simétrica y la otra transitiva.

a	b, a
b	c, d
c	a
d	b

Órdenes y equivalencias

Qué es un orden

Muchas veces los elementos de un conjunto están ordenados.

Así, si A = {cine, circo, TV, fútbol} , los elementos de A están escritos en un cierto orden, de izquierda a derecha: primero cine, luego circo, etc. Este orden podría representar las preferencias de un señor x por esos espectáculos: le gusta más que todo el cine, luego el circo, etc .

Otro señor puede tener gustos distintos, y ordenaría esos mismos elementos de otro modo.

Un mismo conjunto se puede ordenar de diferentes maneras.

Estamos usando la palabra "orden" sin haber dicho todavía exactamente qué significa, o mejor dicho, cuándo la vamos a usar. Justamente estamos tratando de ver cuál es la definición más conveniente de ese concepto tan conocido.

En primer lugar está claro que debemos llamar "orden" a una relación. En un orden siempre interviene un par ordenado de objetos: a me gusta más que b ; a es mayor que b ; a está a la izquierda de b , etc.

Muchas veces, entonces, un orden podrá darse por una tabla. Por ejemplo el orden de preferencias del señor x es una relación de alcance y rango A , representada por la tabla:

cine	circo, TV, fútbol
circo	TV, fútbol
TV	fútbol
fútbol	

Representaremos pues a los órdenes por letras y otros símbolos, como a las relaciones en general. Si R es un orden, aRb significará que a está antes que b en el orden R , o lo que es lo mismo: b está después de a , o es posterior a a .

Pero, ¿cuáles relaciones son órdenes y cuáles no?

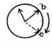
Tratemos de ordenar a los alumnos de esta división por sus méritos como estudiantes. Llamemos M a la relación "mejor alumno que". Hay muchas formas de definir cuándo Juan es mejor alumno que Pedro; una de las que menos discusiones despertaría es quizá ésta: aMb significa que el alumno a tiene en cada materia mejor promedio que b .

¿Es M un orden? Tal vez no todos estén de acuerdo, pues tiene el inconveniente que si, por ejemplo, p tiene mejor promedio que q en Historia, pero peor promedio en Geografía, entonces ya no se podrá decir que uno de los dos es mejor que el otro. Ni pMq ni qMp .

La relación sucesor, S , parece un orden, pero tiene el inconveniente que aunque el sucesor de 20 es 21, y el de 21 es 22, no es verdad que 22 sea el sucesor de 20. S no es transitiva.

En nuestro concepto de orden éste es un inconveniente muy importante: si a es anterior a b y b es anterior a c , entonces a tiene que ser anterior a c . Si no, no vale la pena hablar de orden. Entonces:

I. - Toda relación de orden debe ser transitiva.



Tratemos de ordenar en un reloj los puntos que describe el extremo del minutero. Alguien propone definir la relación L entre esos puntos así: Si b y c son dos puntos cualesquiera de esa circunferencia, bLc significa que el minutero pasa por b antes que por c . Esto parece un orden, pero tiene un grave inconveniente: como el minutero da muchas vueltas, si pasa por b y luego por c , o sea bLc , al rato volverá a pasar por b , de modo que cLb : L es una relación simétrica.

Eso no nos gusta; si b y c son objetos diferentes y b es anterior a c , no queremos que también c sea anterior a b ; eso no es un orden. Entonces:

II. - Si R es cualquier relación de orden y b y c son dos elementos diferentes de su dominio, entonces no puede ser cierto al mismo tiempo que bRc y cRb .

Como esta propiedad es lo más opuesto posible a la simetría, se llama antisimetría. Los órdenes son pues relaciones antisimétricas.

La relación $\leq$ entre números parece un orden: es transitiva y antisimétrica. Pero tiene algo raro: es reflexiva: $n \leq n$. Este inconveniente no es grave; vamos a aceptar que una relación de orden pueda ser reflexiva. Lo que haremos en cambio será llamar orden estricto a todo orden que no sea reflexivo.

Así $<$ es un orden estricto, pero $\leq$ no: es un orden no estricto, o simplemente orden.

Nos falta ahora considerar el ejemplo de la relación "mejor alumno", M . Vimos que podía haber pares de alumnos incomparables: ni bMc , ni cMb . A esto no estamos acostumbrados; el orden que mejor conocemos, que es el orden $\leq$ de los números naturales, no es así: dados dos números b y c se cumple la llamada ley de tricotomía, que dice simplemente: b es menor que c, o c es menor que b , o b y c son iguales.

Pero recordemos que hay otro ejemplo igualmente importante en que la ley de tricotomía no se cumple: es la inclusión de conjuntos.

La relación $\subset$ es transitiva y antisimétrica, como es facilísimo ver (y es también reflexiva); pero hay muchísimos conjuntos incomparables, como los de la figura. Ni $A \subset B$ ni $B \subset A$.

Debido a este ejemplo, decidiremos que la tricotomía no es tan importante, y no la exigiremos para las ordenaciones.

En cambio diremos, cuando puede haber elementos incomparables, que se trata de un orden parcial.

Y si vale la tricotomía, diremos que es un orden total o lineal.

En resumen:

Una relación R se llamará un orden u ordenación de un conjunto A si y solo si A es el alcance y el rango de R, y R tiene las dos siguientes propiedades:

I. - Transitividad: aRb y bRc $\Longrightarrow$ aRc

II. - Antisimetría: aRb y bRa $\Longrightarrow$ a = b.

Si además bRb es falso para todos los elementos de A, se dice que R es un orden estricto.

Si vale además la ley de tricotomía:

III. - a $\neq$ b $\Longrightarrow$ aRb o bRa,

el orden se llama total.

Si dos elementos de A, b y c, diferentes, son tales que ni bRc ni cRb, entonces b y c se llaman incomparables.

Si hay elementos incomparables, el orden se llama parcial.

Ejemplos

Órdenes parciales no estrictos: $\subset$; $\supset$, múltiplo, divisor, extensión de relaciones.

Órdenes parciales estrictos: $\subsetneq$, $\supsetneq$, M (como lo definimos en este capítulo).

Órdenes totales estrictos: $<$, $>$, estar a la izquierda (para puntos de una recta horizontal).

El orden natural de N

Cuando pensamos en los números naturales N, los pensamos ordenados según la relación $<$: 1, 2, 3, ... Pero, ¿cómo se sabe cuál es el menor de dos números naturales? Es fácil decir que el menor es el que aparece antes en la sucesión 1, 2, 3, ... , pero eso no es muy práctico para números grandes.

Si quiero comparar 1375855 con 976667 no necesito, por suerte, contar desde 1 para ver cuál de los dos aparece primero. Hay una regla práctica, basada en que es muy fácil comparar entre sí los dígitos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 . La regla es:

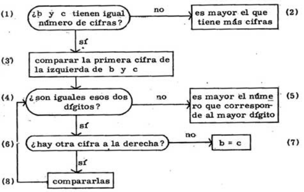
1º) contar las cifras de los dos números; si uno de ellos tiene más cifras que el otro, es el mayor.

2º) si tienen igual número de cifras, comparar la primera cifra de la izquierda. Si son distintas, la mayor es la del número ma - yor.

3º) si las primeras cifras coinciden, comparar las segundas, y así sucesivamente.

Estas reglas, en las que hay que hacer cosas distintas según que algo ocurra o no, es mejor representarlas por diagramas de flujo para que no haya confusión. Estos diagramas son cada vez más im portantes en todas las actividades técnicas, porque permiten dar una serie de instrucciones complicadas paso a paso y sin que haya dudas.

Por ejemplo, la regla que acabamos de dar para averiguar cuál de dos números b o c es el mayor, sabiendo comparar número de cifras y dígitos, tiene un diagrama así:



Si por ejemplo b = 7346 y c = 7350 , salimos de (1) por sí . En (3) comparamos 7 con 7 y por lo tanto salimos de (4) por sí y de (6) por sí. En (8) comparamos 3 con 3 y la flecha nos hace volver a la pregunta (4) , de la que salimos por sí y damos una vuelta más. Pero ahora estamos comparando 4 con 5 , de modo que salimos por no y terminamos en que c > b .

Nótese cómo nos arreglamos para representar el "y así sucesivamente" de la instrucción tercera: o sea correrse un lugar a la de recha y hacer lo mismo que antes. Eso se indica con la flecha que vuelve de (8) a la pregunta (4) : ¿son esos dígitos iguales?, y de la cual salen dos flechas distintas, según la contestación.

Además hemos incluido la posibilidad de que los dos números fue ran iguales. Eso se ve comparando sucesivamente sus cifras de iz quierda a derecha. Si b = c , al llegar al cuadro 4 , siempre se sale por la flecha "sí". Mientras queden cifras a la derecha, se vuel ve a (4). Cuando no quedan más, se sale de (6) por la flecha "no", que nos lleva a la conclusión $b = c$.

Esta relación $<$ se llama el "orden natural" de N. Es un orden total: si dos números son diferentes uno de ellos es menor que el otro. Tiene además una propiedad importante: cada número tiene un siguiente: un número mayor pero tal que entre los dos no hay ningún otro. $32 > 31$, y no hay ningún $n \in N$ tal que $31 < n < 32$.

Si admitimos fracciones eso no ocurre: entre dos fracciones siempre hay otra. Tampoco hay siguiente para los puntos de una recta horizontal ordenados de izquierda a derecha.

Primero y último

En todo esto hemos usado repetidas veces la idea de "primero", que conviene definir para un orden cualquiera. Vamos, también, a definir "último".

Si R es un orden del conjunto A, y p es un elemento de A que cumple pRx para todos los otros elementos x de A, diremos que p es el primer elemento de A, según R.

Si $u \in A$ y cumple xRu para todo otro elemento x de A, diremos que u es el último elemento de A, según R.

El primer elemento es anterior a todos y el último es posterior a todos.

En N, ordenado por $\leqslant$, el primer elemento es 1. En cambio no hay último elemento: para cualquier número dado siempre hay otro mayor.

Ordenando N por la relación $\geqslant$ ocurre lo contrario: no hay primer elemento, y 1 es el último.

Si ordeno los puntos de una recta horizontal de izquierda a derecha, no hay primero ni último elementos.

Ordenando los conjuntos por inclusión, hay primer elemento: es $\emptyset$, y también hay último: es el conjunto universal I. Usando $\supset$ en vez de $\subset$ para ordenar, $\emptyset$ pasa a ser último e I primero.

Si ordenamos N por la relación "múltiplo", que da un orden parcial, no hay primer elemento, pues no hay ningún número que sea múltiplo de todos. En cambio hay último: es 1, pues $x \mathcal{M} 1$ para cualquier x.

Si agregamos el cero, la extensión $\mathcal{M}_0$ tiene ahora primer elemento, pues 0 es múltiplo de todos los números, en N_0.

Ejercicios

1) ¿En el conjunto $\{3, 2, 6\}$ ordenado por $\leqslant$, ¿cuál es el primer elemento y cuál el último?

2) ¿En el mismo conjunto, ordenado como está escrito, de izquierda a derecha?

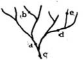
3) ¿En el mismo conjunto, ordenado parcialmente por la relación "divisor"?

4) El conjunto de los alumnos de esta división, ordenados por la

relación "mejor alumno" . M , puede no tener ni primero ni último elemento. En cambio si no pensamos en conjuntos de notas obtenidos por los alumnos sino en conjuntos de notas posibles (de 0 a 10) la relación tiene primer y último elementos. ¿ Cuáles son ?

5) Si R es una relación de orden y R^{-1} es su inversa, R^{-1} también es un orden, que se llama el orden inverso de R . ¿ Cuál es el orden inverso de $\leqslant$, $\subset$, múltiplo ?

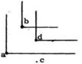
6) Esta figura se llama un árbol, por su forma. Entre sus puntos definimos una relación R así: xRy si se puede llegar desde el punto x hasta el y subiendo por el árbol.



Así aRb , cRd , dRe , pero $a\not R d$, $b\not R e$.

Demostrar que R es un orden parcial de los puntos de esta figura.

7) Entre los puntos de esta página definimos una relación S así: aSb si trazando con vértice en a un ángulo recto de lados : horizontal hacia la derecha y vertical hacia arriba, b está dentro de ese ángulo (o en su borde). Así aSb y aSd pero $a\not S c$ y $b\not S d$.



Probar que S es un orden parcial.

8) La extensión es una relación entre relaciones, que conocemos bien. Probar que es un orden parcial de las relaciones (así como la inclusión es un orden parcial de propiedades o conjuntos).

Contando ordenaciones

¿De cuántas maneras diferentes se puede ordenar totalmente un conjunto?

Probemos primero con un conjunto de dos elementos: $A = \{a, b\}$. No hay más que dos órdenes totales diferentes, que indicaremos escribiendo los elementos de izquierda a derecha:

a, b y b, a

Ahora con uno de 3 elementos: $\{a, b, c\}$. Ya hay 6 maneras de ordenarlos:

a, b, c b, a, c c, a, b
a, c, b b, c, a c, b, a

Las hemos obtenido todas tomando por turno cada elemento como primero y poniendo detrás los otros dos en los dos órdenes posibles. Son 3 grupos de dos órdenes cada uno: $3 \times 2 = 6$.

Si hay 4 elementos: $\{a, b, c, d,\}$, hacemos lo mismo.

Formamos primero todas las ordenaciones que empiecen con a:

a, b, c, d a, c, b, d a, d, b, c etc.

¿Cuántas hay de éstas? Seis, pues 6 son las diferentes formas de ordenar los 3 elementos b, c, d , según vimos.

Luego formamos todas las que empiezan con b . Hay también 6 y son distintas de las anteriores pues el primer elemento es diferente.

También hay 6 que empiezan con c y otras 6 que empiezan con d , y son todas diferentes pues empiezan con distinta letra. En total $4 \times 6 = 24$. No hay otras, pues un orden total tiene que empezar por alguna de las cuatro letras.

Si el conjunto tiene 5 elementos, serán 5 grupos de 24 ordenaciones cada una: $5 \times 24 = 120$ maneras de ordenar totalmente 5 objetos.

Nótese que empezamos con dos maneras de ordenar dos objetos. Luego $6 = 2 \times 3$. Luego $24 = 4 \times 6 = 4 \times 3 \times 2$, luego $120 = 5 \times 24 = 5 \times 4 \times 3 \times 2$.

Las maneras de ordenar totalmente 6 elementos son $720 = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2$, y así sucesivamente.

El producto de un número natural por todos los menores que él hasta 2 (o hasta 1 , es lo mismo) se llama el factorial de ese número, y se simboliza con un signo: ! puesto después del número:

$1! = 1$
$2! = 2 \times 1 = 2$
$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$
$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$, etc.

Si n es el número de elementos de un conjunto, entonces n! es el número de formas diferentes de ordenarlos totalmente (si contáramos también los órdenes parciales serían muchos más).

Así, un campeonato en que intervengan solo 10 equipos, puede terminar de $10! = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 3.628.800$ maneras diferentes, sin contar los casos de empate.

Equivalencias

La igualdad es una relación muy especial e importante y conviene indicar que se usa de maneras un poco diferentes.

Cuando escribimos $a = b$ entre números queremos decir que a y b representan el mismo número.

$A = B$ entre conjuntos, significa que las letras A y B representan el mismo conjunto pues, por definición, A y B deben tener los mismos elementos.

En cambio al decir "este auto es igual a este otro" no queremos decir que son el mismo auto, pues son dos autos, sino que son de la misma marca o modelo y quizá del mismo color, o no. Decimos que son iguales porque tienen algunas propiedades iguales, que son las que nos parecen importantes, pero pueden tener muchas diferencias que a otras personas les parezcan más importantes que la marca, el modelo y el color; por ejemplo, el estado del motor.

Estas dos maneras de usar la palabra igualdad tienen nombres diferentes en Matemática. La primera se llama identidad y la segunda equivalencia.

Un objeto cualquiera es idéntico a otro cuando los dos son el mismo objeto, coinciden.

Un objeto es equivalente a otro cuando tienen en común las propiedades que interesan para el problema que se está tratando.

Así, para comprar cosas, dos billetes de mil pesos son equivalentes, aunque uno esté más arrugado o manchado que el otro. Si en la ruleta uno apuesta a rojo, todos los números dibujados en rojo son equivalentes; en cambio, si uno apuesta a pares, ya no lo son (algunos números pares son rojos y otros no).

La equivalencia, entonces, tiene que definirse en cada problema: hay que decir con respecto a qué vamos a considerar equivalentes dos objetos, cuáles son las propiedades que deben tener en común para llamarlos equivalentes.

La palabra igualdad se usa en Matemática casi siempre como sinónimo de identidad. Los distintos usos de esta relación dependen del alcance y rango que le demos: números, conjuntos, relaciones, etc.

¿Cómo reconoceremos si una relación R dada por una tabla, un gráfico, una fórmula o de cualquier otra manera, es una equivalencia? En otras palabras, ¿cuál es la definición exacta de equivalencia?

Una equivalencia cualquiera debe tener siempre estas tres propiedades:

a) Idéntica o reflexiva: todo objeto es equivalente a sí mismo.
b) Simétrica o recíproca: si x es equivalente a z, también z es equivalente a x.
c) Transitiva: si a es equivalente a b y b es equivalente a c, entonces a es equivalente a c.

Las tres son muy naturales; tanto que uno las ha usado siempre sin siquiera prestarles atención, como a todas las cosas evidentes. Pero son, precisamente, las características esenciales de las equivalencias: nos van a servir para definir equivalencia. O sea:

Una relación R es una equivalencia si y solo si tiene estas tres propiedades:

a) zRz para toda z de su dominio (idéntica = reflexiva),
b) $xRz \implies zRx$ (simétrica o recíproca),
c) aRb y $bRc \implies aRc$ (transitiva).

Recordando la definición de relación de orden dada anteriormente, vemos que los órdenes y las equivalencias son transitivos, pero las equivalencias son relaciones simétricas y los órdenes, no.

Las identidades e igualdades que conocemos son equivalencias pues cumplen a), b) y c).

La semejanza de triángulos es una equivalencia.

"Compatriota", "condiscípulo", "pariente" son equivalencias, admitiendo que uno es compatriota de sí mismo, etc.

En cambio, "hermano" no es una equivalencia.

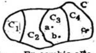
Las clasificaciones de objetos dan equivalencias.

Por ejemplo la clasificación de los vertebrados en: mamíferos, peces, aves, etc., permite definir la relación R : "estar en la misma clase":

$$aRb$$

si ambos son mamíferos o ambos son peces, etc.

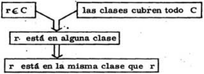
Siempre que tengamos una clasificación o partición de un conjunto en clases (repasar en el capítulo III, Particiones) podemos definir la relación "estar en la misma clase", que podemos llamar por ejemplo E. En la figura, los conjuntos C_1, C_2, C_3 y C_4 forman una partición del conjunto C (son partes de C disjuntas, no son vacías y cubren todo C).



Entonces aEb porque a y b están en C_3. En cambio $a \not{E} c$ porque a y c están en distintas clases.

Esta relación E es por fuerza una equivalencia de dominio C. En efecto, E tiene las tres propiedades de la equivalencia:

Reflexiva: rEr para todo r de C :

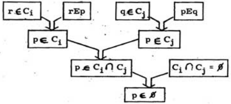


Simétrica: rEs $\Longrightarrow$ sEr,

pues es lo mismo decir "r y s están en la misma clase" que "s y r están en la misma clase".

Transitiva: rEp y pEq $\Longrightarrow$ rEq.

Demostrémoslo por el absurdo, suponiendo que r y q están en clases diferentes C_i y C_j, (y por lo tanto disjuntas: $C_i \cap C_j = \emptyset$).



Según el diagrama, llegamos a deducir $p \in \emptyset$, lo que es absurdo pues en $\emptyset$ no hay elementos.

Por lo tanto, r y q están en la misma clase.

Tenemos así una manera sencilla de inventar equivalencias entre los elementos de un conjunto C : partimos C en clases, y la relación de estar en la misma clase es una equivalencia.

Por eso a las clases de una partición se las llama clases de equivalencia.

Ejercicios

1) Ninguna de las siguientes relaciones es una equivalencia. ¿Cuál es la propiedad que falla en cada caso?

a) x es parecido a y ,

b) x vive cerca de y ,

c) x e y son rectas con un punto común o más,

d)

E	
a	b, c, a
b	c, b, d
c	b, a, c
d	b, d

2) Sea E una equivalencia, y supongamos que $a_1 E a_2$, $a_2 E a_3$, $a_3 E a_4$, ... , $a_{999} E a_{1000}$ (los puntos suspensivos remplazan a las equivalencias que faltan).

Entonces $a_1 E a_{1000}$.

3) R y T son tablas incompletas de equivalencias, pero lo que ya está escrito en cada una basta para completar la relación. Completarlas.

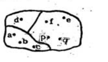
R	
a	b
b	b, c, x
d	m, k
h	m, h
k	k
x	b

T	
-a	a, p, q
-b	b, n
s	s
y	y
-c	c, q
-d	n
m	m, s
-n	n, b, c
-p	p
-q	q
-r	r, p

4) Los puntos de la Tierra se pueden clasificar por su latitud. ¿Cuáles son las clases? ¿Por qué no se los puede clasificar por la longitud?

5) Éste es el esquema de una partición en A :

A = {a, b, c, d, e, f, g, } .



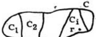
Hacer la tabla de R "están en la misma clase".

Luego hacer otras particiones en el mismo conjunto y las tablas correspondientes de R . Verificar que todas ellas son tablas de equivalencias.

La partición ~~de C~~ indicada en la figura sabemos que define una equivalencia R : aRb $\Longleftrightarrow$ a y b están en la misma clase.

¿Cuáles son todos los elementos de C equivalentes a r ?

Son los que están en la misma clase que r , o sea forman C_i .



Si para cada punto de C buscamos el conjunto de los puntos equivalentes a él, obtendremos todas las clases de la partición.

6) Sea ahora E una equivalencia cualquiera, de dominio D . No sabemos si E fue obtenida con una partición de D .

Tomemos un punto del dominio, a , y formemos un conjunto A_a con todos los puntos del dominio equivalentes a él. Por supuesto: $A_a \subset D$.

Hagamos otro tanto con otro punto $b \in D$ y llamemos A_b a este segundo conjunto.

Demostrar que A_a y A_b son iguales o son disjuntos: $A_a = A_b$ o $A_a \cap A_b = \emptyset$.

Tomemos todos los conjuntos A_x diferentes construidos así. Demostrar que forman una partición del conjunto D .

Como los A_x son las clases de una partición sabemos definir con ellos una equivalencia R : "estar en la misma clase".

aRb significa que a y b están en uno de los A_x .

Demostrar que R = E .

Para interpretar más fácilmente las indicaciones, hacer primero el ejercicio con alguna equivalencia sencilla dada por una tabla.

7) A es un conjunto de personas $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ y E la relación "tiene la misma edad que". Hacer la tabla de esta relación. Si es equivalencia, hacer una partición en A . ¿Cuáles son sus clases?

a : 14 años	d : 15 años	g : 15 años
b : 15 años	e : 11 años	h : 14 años
c : 14 años	f : 14 años	

(Se tendrá en cuenta solo los años de cada persona) .

8) Vamos a definir una relación C entre números de N_o : Dos números están en la relación C si divididos por 12 tienen el mismo resto.

7 C 19 pues 7 y 19 divididos por 12 tienen resto 7 .
61 C 37 los dos números divididos por 12 dan resto 1
12 $\not C$ 20, 33 $\not C$ 24 , etc.

Se dice que 7 y 19 , 61 y 37 son congruentes respecto de 12, o módulo 12 .

Evidentemente esta relación es simétrica. Demostrar que es una equivalencia.

Si en vez de 12 fijamos otro número, 5 , por ejemplo, los pares de números congruentes no son los mismos; cambia la relación:

C' : "es congruente con" respecto a 5 .

42 C' 12 , 39 $\not C'$ 15 , 10 $\not C'$ 12 .

Hacer la tabla de C' con dominio $\mathfrak{D} = \{1, 2, \ldots, 30\}$.

¿Qué partición hace en $\mathfrak{D}$? Dar la tabla de la relación R , "es tán en la misma clase" correspondiente a esa partición.

9) En el plano marcamos una recta D . Diremos que aDb si y solo si a y b son dos puntos del plano tales que la recta que pasa por ambos es paralela a D, o si coincide con D. ¿Cuál es la partición del plano que se obtiene con el procedimiento anterior ?

Capítulo VII

FUNCIONES

Tengo dos conjuntos, A y B. Si me dan instrucciones que partiendo de cada punto de A me permitan llegar a un punto de B, diré que se ha definido una función o transformación, de dominio A y rango B.

Una función entonces asocia a cada punto del dominio un solo punto del rango. No se pide que cada punto del rango esté asociado a alguno del dominio; puede estar asociado a uno, a varios o a ninguno.

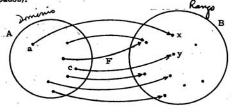
El punto de B asociado de este modo a un punto X de A se llama "valor que toma la función en X", o "imagen de X por la función". Las imágenes de todos los puntos de A forman un subconjunto del rango que se llama "imagen de A por la función".

Si a cada alumno de esta división le hago corresponder el banco en que se sienta, tengo una función F, pues cada alumno tiene asignado un solo banco. No importa que, si hay bancos dobles, haya dos alumnos a quienes corresponda el mismo banco. Tampoco que haya bancos que nunca son ocupados por alumnos. Lo que interesa es que a cada alumno le toque un banco, ni más ni menos.

Nos podemos imaginar esta función tomando por una parte el conjunto de los alumnos, A, por otra el de los bancos, B, y la función F por flechitas que parten de un elemento de A y terminan en uno de B "una sola flecha por cada elemento de A".

A es el dominio, pues todo alumno se sienta en algún banco.

El rango es B. La imagen puede ser más pequeña (si hay bancos desocupados).



F: A $\rightarrow$ B

F: A $\longrightarrow$ B significa que F es una función, A su dominio y B su rango; y se lee: "función de A en B"

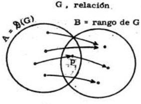
x es la imagen de a por F : x = F a ; etc. (*)

Si F es una función, también se dice que x es el valor que toma F en a.

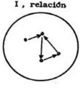
(*) Si una función se representa por una letra minúscula, por ejemplo, f, conviene poner el elemento del dominio entre paréntesis, pues es fácil confundir f a con el producto de los símbolos. Pondremos; f(a) en vez de f a.

Siempre que definamos una función conviene imaginar su dominio ~~por un lado y su rango por el otro (aunque pueden tener~~ puntos comunes) y la función como algo que lleva o aplica o transforma cada punto del dominio en un punto del rango.

Las relaciones que responden a los esquemas siguientes son funciones:



$p \in \mathfrak{D}(G) \cap$ rango de G



$\mathfrak{D}(I)$ = rango de I

Funciones y relaciones

Pensemos en una relación R . a ~~∈ 𝔇(R) es un punto de su dominio~~. Ra , la imagen de a por R , está formada por los puntos que están en la relación R con a .

Ra puede tener muchos elementos pero siempre, por lo menos, uno (si no $a \notin \mathfrak{D}$ (R) por definición de dominio).

R	
Juan	6, 8
Pablo	9, 6, 3
Pedro	7

Si, como sucede en la relación de la tabla Q , la imagen de cada punto del dominio tiene exactamente un elemento, la relación o correspondencia define una función o transformación. El dominio de la relación es el dominio de la función y los rangos e imágenes también coinciden. Por eso, hemos usado los mismos términos y usaremos también "alcance" para funciones.

Q	
Juan	abril
Pedro	junio
Pablo	enero

Una función es entonces un caso especial de relación. Al revés, a veces se llama a las relaciones "funciones multiformes", pues son como funciones, salvo que cada punto del dominio puede tener muchos valores.

"Padre" es una función.

Si xPy significa " x tiene por padre a y " ∮ para cada persona x hay un solo y que hace la proposición verdadera. Hijo, en cambio, no es una función, pues una persona puede tener más de un hijo.

Si se usa la forma " x es padre de y " , entonces es claro que "padre" no es función, pero "hijo" sí.

Ejercicio

1) De las relaciones familiares: hermano, abuelo, tío y primo, cuáles son funciones?

Sí a cada persona le hacemos corresponder su fecha de cumple - años tenemos una función F cuyo dominio son las personas y su rango, los días del año. Todos los días cumple años alguien, con toda seguridad, pero si estuviéramos refiriéndonos a un grupo pequeño de personas, habría días en que nadie cumple años y, en ese caso, la imagen del dominio no sería todo el rango.

Si:

a cada persona le hacemos corresponder el número de su cédula de identidad;

a cada equipo de un torneo, los puntos que obtuvo;

a cada alumno de esta clase, su nota de matemática en abril,

cada una de estas correspondencias es una función.

La relación "siguiente" o "sucesor" es una función

Esta relación entre números del conjunto $\underline{N} = \{1, 2, \ldots\}$ da origen a una función. El dominio es $\underline{N}$ y el rango también: es una función de $\underline{N}$ en $\underline{N}$; $S : \underline{N} \longrightarrow \underline{N}$.

La imagen de cada número es el siguiente:

$S\,1 = 2$, $S\,2 = 3$, etc.

La imagen de S no es todo $\underline{N}$, pues le falta el 1 , que no es el siguiente de ningún número de $\underline{N}$.

S	
1	2
2	3
3	4
⋮	⋮

$\mathrm{Im}(S) = \{2, 3, 4, \ldots\} = \underline{N} \sim \{1\}$.

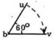
En las funciones dadas por tablas la segunda columna tiene que tener un solo elemento en cada fila; en cambio, no importa que un elemento de la segunda columna figure repetido en varias filas. ¿Por qué?

Juan	18
x	Caribe
r	18

Juan	18
x	Caribe
r	17, a

¿Algunas de estas relaciones es una función?

Las transformaciones geométricas usuales son funciones



$v = Ru$ pues u es transformado en v por la rotación

$Rb = b$ pues b no se mueve

Las rotaciones, traslaciones, simetrías, reflexiones, son funciones. Por eso las funciones se llaman también transformaciones.

R es una rotación de 60^{o}

de un plano P alrededor del punto b en el sentido de las agujas del reloj: es una función.

El dominio de R son los puntos del plano P que es, a la vez, el rango.

Precisar por qué R es una función.

Funciones dadas por tablas

Las funciones que se utilizan con mucha frecuencia se dan por tablas impresas. Es un método muy cómodo, pero con ciertas limitaciones.

Tomemos como ejemplo la función "raíz cuadrada positiva", de símbolo $\sqrt{\ }$, cuyo dominio y rango son todos los números positivos R^+ (naturales o no).

$$\sqrt{\ } : R^+ \longrightarrow R^+$$

Es costumbre escribir el elemento a que se aplica esta función dentro del símbolo, en vez de a su derecha:

$\sqrt{20}$ y no $\sqrt{\ }\ 20$.

La raíz cuadrada positiva de un número b de R^+ es otro número de R^+ que elevado al cuadrado da b. Así $\sqrt{9} = 3$, $\sqrt{25} = 5$, $\sqrt{0,01} = 0,1$. Estos valores se disponen en forma de tabla, como la siguiente:

x	$\sqrt{x}$	x	$\sqrt{x}$
0,2	0,447	5,2	2,280
0,4	0,632	5,4	2,323
0,6	0,774	5,6	2,366
0,8	0,894	5,8	2,408
1,0	1,000	6,0	2,449
1,2	1,095	6,2	2,489
1,4	1,183	6,4	2,529
1,6	1,264	6,6	2,569
1,8	1,341	6,8	2,607
2,0	1,414	7,0	2,645
2,2	1,483	7,2	2,683
2,4	1,549	7,4	2,720
2,6	1,612	7,6	2,756
2,8	1,673	7,8	2,792
3,0	1,732	8,0	2,828
3,2	1,788	8,2	2,863
3,4	1,843	8,4	2,898
3,6	1,897	8,6	2,932
3,8	1,949	8,8	2,966
4,0	2,000	9,0	3,000
4,2	2,049	9,2	3,033
4,4	2,097	9,4	3,065
4,6	2,147	9,6	3,098
4,8	2,190	9,8	3,130
5,0	2,236	10,0	3,162

Aquí tenemos las raíces cuadradas positivas de los números de 0,2 a 10, a intervalos de 0,2. Si queremos la raíz de 6,8, no tenemos más que buscar el número que está a la derecha de 6,8 : 2,607 y ésa es su raíz cuadrada.

Pero hay dos observaciones que hacer.

El número que figura en la columna imagen no es casi nunca la raíz exacta del que está a su izquierda. Así, $2,607^2 = 6,796\ldots \neq 6,8$. Es sólo la raíz cuadrada con tres cifras decimales exactas por defecto. Eso significa que elevado al cuadrado da igual o menor que el número a su izquierda, pero si la aumentáramos en un *milésimo*, ya daría mayor: $2,608^2 = 6,801\ldots$.

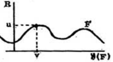
Además la tabla no nos dice cuál es la raíz cuadrada de los números que no figuran en ella. El dominio de una tabla está dado por su primera columna, y aunque una tabla ocupe muchas páginas (como a veces ocurre) nunca podrá incluir los infinitos números.

A veces, con un poco de inteligencia eso puede subsanarse en parte. Si necesito la raíz cuadrada de 680, que es 6,8 x 100, es fácil ver que es igual a la de 6,8 multiplicada por 10 : 26,07 .

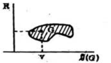
Y si necesito $\sqrt{6,75}$, observo que cuando z crece, $\sqrt{z}$ también crece, y de eso deduzco que $\sqrt{6,75}$ es un número comprendido entre $\sqrt{6,6}$ y $\sqrt{6,8}$, lo que me ahorra algunas cuentas.

Gráfico de una función

Es muy conveniente representar las funciones por gráficos. En un eje horizontal representamos el alcance; en un eje vertical, el rango, y cada par de elementos que satisfaga la función nos da un punto del gráfico. Si F es la función, y u = Fv (u es el valor de la función en v), el punto de coordenada horizontal v y vertical u pertenece al gráfico de F .



(a)



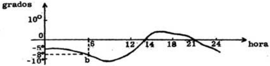
(b)

La figura (a) es el gráfico de una función; la (b) , el gráfico de una relación que no es función.

Para saber cuál es la imagen según F y según G del punto v , trazamos por v una paralela al eje vertical hasta que corta al gráfico: en (a) , lo corta en un solo punto; en (b) , en muchos.

Por la intersección obtenida en (a) trazamos una paralela al eje horizontal y el punto en que ésta corta al vertical es el valor de la función. El gráfico de una función no es un conjunto cualquiera pero puede ser un trazo continuo no importa de qué forma. Llamaremos a estas líneas "curvas," aunque no sean curvadas.

El gráfico de la temperatura a lo largo de un día, en un lugar, podría ser el siguiente:



En el eje horizontal se han puesto las horas del día, desde las 0 horas hasta media noche. En el eje vertical, las temperaturas a partir de 0° para arriba y para abajo.

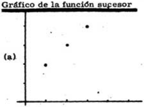
Si b está en la curva de la temperatura:

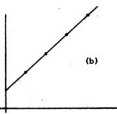
a las 6 de la mañana hizo 8° bajo cero.

Los gráficos se utilizan a menudo cuando el dominio es tiempo : ganancias mensuales de una empresa, espacio que recorre un barco día a día, potencia eléctrica que se usa en una ciudad a lo largo del día.

Hay funciones que sería muy incómodo representar gráficamente. Por ejemplo la rotación del ejemplo anterior. Su dominio es todo el plano: entonces habría que ingeniarse para poner el plano como "eje" horizontal, lo cual no es práctico, aunque no imposible.

Gráfico de la función sucesor





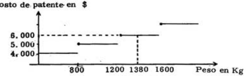
El gráfico de S es la figura (a). Está formado por un conjunto de puntos que están sobre una recta: son puntos aislados, no tenemos que unirlos. Si lo hacemos - figura (b) - nos queda el gráfico de otra función L , que es una extensión de la función S . Demostrarlo (es la extensión de una relación).

Muchas funciones "raras" se manejan bien gráficamente

El costo de la patente de un automóvil depende del peso de éste .

Por ejemplo, si pesa menos de 800 Kg se paga $4000, si pesa entre 800 y 1200 se paga $5000, etc.

Esto se representa así:



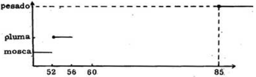
La "curva" está formada por todos los segmentos separados: tiene saltos o discontinuidades. Eso no importa; lo que interesa es que sirve para lo que necesitamos: si un auto, pesa, supongamos, 1380 Kg nos dice cuánto hay que pagar.

Del mismo tipo es la curva del precio del boleto de tren en función del kilometraje recorrido. El precio sube "a saltos" y la forma de la función es una "escalera" como la anterior.

Lo mismo ocurre con la curva de la categoría de un boxeador de acuerdo con su peso:

Si pesa menos de 52 Kg es "mosca"

Si pesa entre 52 y 56 es "pluma", etc.



Llamemos:

B , a la función,

C , al conjunto de las categorías: {mosca, pluma, gallo, . . . , pesado} ,

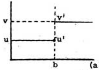
R^+. al conjunto de los números positivos.

El alcance de B es R^+ y su imagen y rango es C .

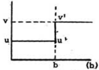
En las ordenadas no hemos puesto números sino los nombres de los puntos del rango, separados como se nos dio la gana. Tampoco fijamos una unidad para representar los puntos del dominio.

Cuando se tiene una función con saltos no hay que tentarse y llenar el salto con un segmento vertical, error que muchos cometen. (ver gráfico en la página siguiente).

¿Cuál es el valor de la función en el punto b ? En la figura (b) la intersección de la curva con la vertical trazada por b es todo el segmento u'v' y por lo tanto, corresponden al punto b del dominio todos los valores comprendidos entre u' y v' . Entonces no es, una función, sino una relación o función multiforme.



es función



no es función

En la figura (a), en cambio, la vertical por b corta a la curva solo en el punto u' (que, para que así se entienda, hemos marcado más fuerte que los otros) y, por lo tanto, el valor de la función en b es u'.

Podríamos haber marcado v' en vez de u' y entonces, el valor de la función en b sería v' pero, entonces, la función es otra.

Cuál de las dos nos conviene depende del problema que estemos tratando.

En el ejemplo de la patente, el valor en un salto corresponde al segmento más alto, pues así lo dice la ley.

Los ingenieros, los físicos, los químicos, los economistas, usan mucho el método gráfico de dar o representar funciones.

En el mundo, todas las cosas importantes están relacionadas, unas son funciones de otras y gran parte del trabajo de los técnicos y científicos es averiguar cómo son esas funciones.

La resistencia de una columna es función de su diámetro, a igualdad de otras condiciones. Es decir, a cada diámetro corresponde una resistencia. Y no es cierto que a doble diámetro corresponda doble resistencia; es una función más complicada y si no se conoce bien no se podrá construir con seguridad y economía.

Busquen otros ejemplos de funciones interesantes en el mundo actual.

Funciones definidas por fórmulas

Ahora veamos otra manera de definir funciones que es más característica de la Matemática: por "fórmulas".

La superficie de un cuadrado es una función de la longitud del lado; a cada longitud corresponde un valor de la superficie.

Tenemos así definida una función C cuyo dominio está formado por todas las longitudes posibles, las cuales una vez adoptada una unidad - el metro, el cm o lo que sea -, quedan representadas por todos los números positivos posibles. Su rango son las medidas de todas las superficies posibles en m^2, cm^2 o lo que corresponda.

¿Cuál es la manera más cómoda de representar esta función, o sea de decir cómo es? Por tablas no es muy conveniente.

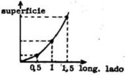
Para hacer esta tabla suponemos que longitud y superficie se han medido en unidades correspondientes (m y m^2 , por ejemplo)

dominio	valores
0, 5	0, 25
1	1
1, 5	2, 25
2	4
⋮	⋮

Por larga que sea la tabla , siempre será muy incompleta, pero, a veces, también útil, pues ahorra cálculos.

Gráficamente obtenemos una idea mejor de lo que sucede ; "vemos" cómo va variando la superficie al aumentar el lado.

Claro que para construir esta curva hemos tenido que usar la tabla, pues las curvas, (casi siempre) se dibujan marcando algunos puntos aislados y uniéndolos.



Aquí tenemos algunos puntos y si con ellos no nos alcanza para saber bien cómo es la curva, podemos usar más. Pero por muchos que usemos, o por larga que sea la tabla, no podemos decir que hemos representado toda la función. Tal vez para alguno de los puntos del dominio que no figura en la tabla la función toma un valor que no es ni parecido a lo que sospechamos (en el gráfico, hemos dibujado los valores un poco adivinando).

La fórmula nos proporciona el medio de conocer cualquiera de los valores de la función que falta en la tabla.

La definición completa de C es fácil de dar:

Si b es un punto cualquiera del dominio, C(b) ó Cb se obtiene multiplicando b × b , o sea elevando b al cuadrado.

$$Cb = b^2$$

En esta sencilla fórmula están resumidos los gráficos y tablas más completos que pudieran hacerse de la función C . Cualquiera sea el número b , nos dice cómo calcular el valor de la función.

Variables. Variables independiente y dependiente

$$Cb = b^2$$

es una función dada por una fórmula. Se entiende que vale no solo para el número representado por b , sino para cualquiera. Habría que decir entonces "para todo b del dominio".

Por tradición se acostumbra a usar la letra " x " para representar un punto cualquiera del dominio y la letra " y " , para simbolizar el valor correspondiente de la función.

$$y = Cx = x^2 .$$

Recordemos que x es el símbolo de una variable : no es el nombre de un elemento sino que indica el lugar donde han de ponerselos distintos elementos a los que se aplica la fórmula. Podemos decir entonces que x representa un punto cualquiera, indeterminado, del dominio.

Usar estas letras es una costumbre, no una obligación y a veces no están disponibles porque se las ha usado en el mismo problema para otra cosa. Generalmente las sustituiremos por las últimas letras del abecedario: z , u , v , w , etc.

La variable que representa un punto cualquiera del dominio se llama variable independiente; la que representa un valor cualquiera de la función, variable dependiente. Se las llama así porque el valor de la función depende del punto del dominio: uno siempre elige un punto del dominio como quiere y entonces queda fijado el valor de la función.

Ejemplos de funciones dadas por fórmulas

La fórmula que relaciona al perímetro del cuadrado con el lado es:

$$y = 4x \ .$$

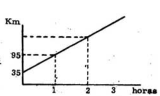
Esta fórmula define una función: y es el perímetro y x la longitud del lado, medidos ambos en la misma unidad.

Si un tren parte del Km 35 y anda a 60 Km por hora, ¿cuál es la función que nos dice a qué kilómetro ha llegado el tren en un instante cualquiera?

$$y = 35 + 60x \ .$$

x es el número de las horas transcurridas desde la partida; y es el kilómetro alcanzado en x horas.

Gráficamente esta función sería como la figura o sea, una recta. La fórmula para calcular y dice que hay que multiplicar 60 por las horas transcurridas y al resultado sumarle 35.



La función sucesor o siguiente, S , tiene por fórmula

$S\,x = x + 1$, donde $x \in \underline{N}$

Se pueden inventar infinitas fórmulas que definen funciones.

$$y = 3x^2 + 2x - 17$$

es una función de dominio {los números} y rango también. A cada número x le hace corresponder el número y que se obtiene si se eleva x al cuadrado, se multiplica el cuadrado por 3, luego se suma a este resultado el doble de x y a todo se le resta 17.

Ejercicio

2) Hacer una tabla y un gráfico de esta función.

Parámetros

Si en vez de la función

$y = 35 + 60x$,

tenemos esta otra

$y = 100 + 12x$,

ó

$y = 40 + 20x$,

estas tres funciones son "parecidas" pues en todas ellas, hay que multiplicar a x por un número fijo y sumar al producto otro número fijo (fijo con respecto a x , pero diferente en cada función).

Los gráficos de las tres son rectas: tres rectas distintas.

Son casos particulares de la función:

$$y = a + b.x \; .$$

La primera resulta si $a = 35$ y $b = 60$.

Estas letras a y b que representan ciertos números que se mantienen fijos en la función, se llaman parámetros o, a veces, constantes (las tres rectas distintas tienen diferentes parámetros. Basta que cambie uno solo de los parámetros para que resulte otra recta).

Para simbolizarlos usaremos las primeras letras del abecedario en lo posible, para que se vea en seguida cuáles son parámetros y cuáles variables.

Así la fórmula:

$$y = (a + x)^2$$

se interpreta así: si le damos a a un valor numérico fijo, por ejemplo $a = 3$, se obtiene una función:

$y = (3 + x)^2$,

en la cual x representa un punto del dominio e y el valor de la función correspondiente.

¿Cuál es el dominio? Podemos convenir en que esté formado solo por los números naturales. Si no lo aclaramos explícitamente, se entenderá que el dominio está formado por todos los números para los cuales puede hacerse el cálculo (enteros o no). En este caso la función hace corresponder a cada número x de su dominio el que resulta de sumarle 3 y elevar después al cuadrado (en ese orden, pues para eso se han puesto los paréntesis).

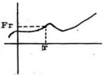
Funciones dadas por diagramas de flujo

En resumidas cuentas, todos los métodos de dar funciones que hemos descrito consisten en dar instrucciones para averiguar cómo se pasa de un punto cualquiera del dominio al punto correspondiente del rango.

Dado un objeto r , la función es un procedimiento para obtener a partir de r , otro objeto q que es la imagen de r.

Así la función dada por la fórmula $Fx = 4x^2 + 3$ es en realidad una serie de instrucciones:

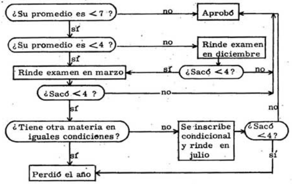
Para calcular el valor de F en el punto r hay que elevar r al cuadrado, multiplicar el resultado por 4 y a esto sumarle 3.



En un gráfico las instrucciones son trazar por r una paralela a las ordenadas, y donde ella corta al gráfico, trazar una paralela a las abscisas, y donde ésta corta a las ordenadas está el valor Fr .

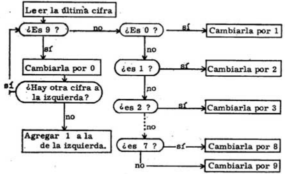
Cuando las instrucciones que definen una función son muchas es conveniente usar diagramas de flujo, como hicimos para conjuntos.

Por ejemplo, la función que a cada alumno le dice si aprobó Matemática en este curso o perdió el año, podría estar dada por la siguiente reglamentación:



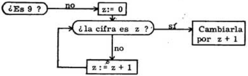
Otro ejemplo. Escribir el sucesor de un número natural dado por su expresión decimal, no es nada sencillo:

Si el número no termina en 9 , se cambia solo la última cifra , pero si termina en 9 se la cambia por 0 y hay que examinar la cifra de la izquierda para ver si es 9 o no, etc. Esto se expresa mejor con un diagrama de flujo:



Los puntos suspensivos entre ¿es 2 ? y ¿es 7 ? representan los números que faltan: 3, 4, 5, 6 , que no ponemos para no agrandar el diagrama.

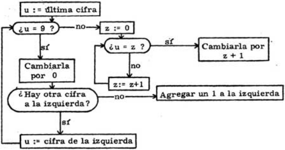
En realidad la parte de la derecha se podría remplazar por algo más elegante: introducimos una variable z que vaya de 1 a 8. Esa parte quedaría entonces:



o sea, primero preguntamos si la cifra que estamos considerando (y que no es un 9) es cero. Si no, sumamos 1 a z , o sea queda z = 1 , y preguntamos lo mismo que antes, pero que ahora significa: " ¿ Es 1 ? " . Si no, volvemos a sumar 1 a z , o sea que queda z = 2 , etc.

Como máximo cuando z llegue a 8 , tendremos que salir de la pregunta por la flecha sí .

Introduciendo todavía un nombre, u , para la cifra que se está considerando, el diagrama completo es:



El número que queda después de hacer los cambios indicados en el número dado (y agregar 1 si corresponde), es el resultado. Seguir el diagrama con los números 20 , 26 , 29 , 999 .

Funciones constantes

Hay algunas funciones muy sencillas y muy útiles, como las funciones constantes que dan el mismo valor a todos los puntos del dominio. Su imagen tiene un solo punto.

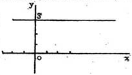
Por ejemplo:

$$y = 3 ,$$

simboliza que la función vale 3 para cualquier x .

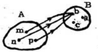
El símbolo x ni aparece en la fórmula, pues el valor de y no depende de él.

El gráfico de esta función sería una recta paralela al eje del dominio, o de las "x" , a 3 unidades de altura. En el dibujo se extiende también hacia la izquierda del eje "y" , pues el dominio puede incluir los números negativos.



No hace falta que las variables representen números.

Si tenemos la función $F : A \longrightarrow B$, siendo A y B conjun-



Im(F) = b

F	
m	b
n	b
p	b

tos cualesquiera y F toma el valor $b \in B$ para cualquier punto de A , o sea $Fx = b$ para todo $x \in A$
entonces, F es una función constante. Si la expresamos por una tabla, la segunda columna tiene b en todas las filas.

La identidad

Otra función sencilla es la identidad, U , en un conjunto A . Ella hace corresponder a todo punto del dominio el mismo punto.

$Ux = x \quad , \quad x \in \mathscr{D}(U)$

Dominio, rango e imagen de la función son el mismo conjunto:

$U : A \longrightarrow A \quad , \qquad Im\,(U) = A = \mathscr{D}(U)$.

La identidad del conjunto:

$B = \{Juan\ ,\ 17\ ,\ r\}$,

tiene esta tabla:

U	
Juan	Juan
17	17
r	r

Como cada conjunto tiene su función identidad, sería mejor indicar con un subíndice de qué conjunto se trata. Así U_A sería la identidad de A y U_B la de B , que son funciones diferentes.
Pero cuando se entienda por el texto cuál es el conjunto de que estamos hablando, no pondremos subíndice.

Si $\mathscr{D}(U)$ son los números, el gráfico de U es la recta bisectriz del primer y tercer cuadrantes.
Su fórmula es:

$y = x$.

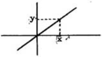


Imagen y rango

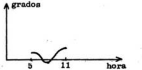
El rango de una función no es muy importante para las aplicaciones prácticas. El solo nos da una primera idea de qué clase de objetos son los valores de la función: números, bancos, figuras , personas. Pero lo que más importa es saber cuáles son esos valores, o sea los que forman la imagen de la función, no el rango.
Por eso cuando de entrada conocemos la imagen (por ejemplo, cuando la función está dada por una tabla) puede ser conveniente tomar rango = imagen .
Así la función sucesor S , por transformar cada número natural en otro, se escribe $S : \underline{N} \longrightarrow \underline{N}$, pero sabiendo ya que 1 no está en la imagen podríamos escribir $S : \underline{N} \longrightarrow (\underline{N} \sim \{1\})$. Eso no trae ningún inconveniente en la práctica.
En cambio cuando la función está dada por una fórmula, casi nunca sabemos con solo mirarla, cuáles van a ser los valores, y tenemos que conformarnos con decir que serán números. Damos pues el rango , y la imagen puede resultar más pequeña.

La mayoría de las veces, en las aplicaciones prácticas, el rango ni se menciona. Lo mismo pasa con el alcance

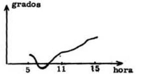
Extensión de funciones

Puesto que las funciones son relaciones, se podrán extender y restringir como éstas (repasar extensión de relaciones).

Si he tomado la temperatura del día desde las 5 hasta las 11 de la mañana, tengo una función F, cuyo alcance es el tiempo, su rango son los números, y su dominio los instantes entre las 5 y las 11 de la mañana.



Si sigo registrando la temperatura hasta las 3 de la tarde, tengo otra función G, de igual alcance y rango que F, pero de dominio mayor. Además, F y G coinciden entre las 5 y las 11, o sea en los puntos del dominio de F.



G es entonces una extensión de F. Se dice también que F es una restricción de G.

Extender una función es aumentar puntos a su dominio, sin cambiarla donde ya estaba definida. Lo que se obtiene es otra función. La función sucesor $S : \underline{N} \longrightarrow \underline{N}$ se puede extender a $\underline{N}_0$ así: a 0 le corresponde 1, y a 1, 2, 3, ... , lo mismo que antes. Obtengo así una función S_0 que es extensión de S. Aquí tenemos su tabla:

S_0	
0	1
1	2
2	3
⋮	⋮

Cuando una función está dada por una tabla, es muy fácil extenderla o restringirla: basta agregarle o quitarle filas.

F	
a	17
b	b
c	a

F_1	
a	17
b	b
c	a
r	b

F_2	
a	17
c	a

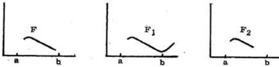
F_3	
a	17
b	b
c	a, b
r	b

F_1 es una extensión de F. F_2 es una restricción de F. F_3 es una relación, extensión de F, pero F_3 no es una función pues a c, le corresponden dos valores: a y b.

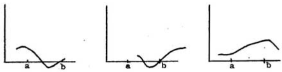
Cuando hablamos de extensión de una función, pensamos en en general, en otra función y no en una relación cualquiera.

Cuando una función está dada por un gráfico, también es muy fá - cil extenderla o restringirla. Para extenderla basta prolongar la cur va. Para restringirla basta quitarle puntos.

Ejercicio



F_1 es extensión de F .
F_2 es restricción de F .
Ninguna de las siguientes funciones es extensión de las otras:



3) ¿Por qué?

Ecuaciones

Hasta ahora, dada una función F , nos hemos preguntado ¿cuál es el punto del rango que corresponde a un punto del dominio?

Por ejemplo: ¿Cuál es el número siguiente de 4? ¿ Qué tempe - ratura hizo a las 14 ? ¿ Cuál es la superficie de un cuadrado de 6 cm de lado? ¿ A qué kilómetro ha llegado el tren al cabo de 3 ho- ras de su partida?

Podemos, también, plantearnos el problema inverso: ¿ Qué nú- mero tiene por siguiente a 20? ¿ A qué hora hizo 0^o? ¿Cuál es el lado de un cuadrado de 9 m^2 de superficie? En general, ¿qué pun- to del dominio tiene por imagen a tal punto del rango?

Estos problemas se llaman ecuaciones y los puntos del dominio que buscamos, raíces de ecuación, o soluciones.

Resolver una ecuación es encontrar sus raíces.

Si la función está dada por una tabla es fácil decir cómo se re - suelve una ecuación (aunque si la tabla es larga no resultará tan fá- cil encontrar las raíces).

Sea la función F dada por la tabla:
Su dominio es: $A = \{Juan, 17, a, piedra\}$
Su rango, supongamos que está formado por los mismos elementos que su imagen, no más: $B = \{p, Marte, 3\}$. Para resolver la ecuación:

F	
Juan	p
17	Marte
a	3
piedra	p

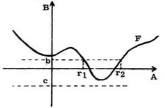
$$Fx = 3$$

tenemos que averiguar cuáles son los puntos x del dominio en que F vale 3. Basta, entonces, buscar todos los 3 que aparecen en la segunda columna y ver qué elementos de la primera están en la misma fila que ellos.

En este caso: $x = a$ pues solo $Fa = 3$.

Las raíces de la ecuación: $Fx = p$ son dos: $x =$ Juan y $x =$ piedra.

Si sustituimos a la x de una ecuación $Fx = b$ por una raíz tiene que quedar una proposición verdadera.



Si la función está dada por un gráfico, como éste, es también fácil resolver las ecuaciones respectivas.

Sea

$$Fx = b,$$

me han dado b y debo averiguar en qué puntos la función F vale b.

Trazo por b una paralela al dominio A y por cada punto en que ésta corta a la curva F, trazo una paralela al rango B. Las intersecciones de las paralelas a B con el dominio dan las raíces. ¿Por qué?

Puede suceder que haya puntos del rango, como c, que no dan ninguna raíz. La ecuación $Fx = c$ <u>no tiene solución</u>.

Es natural; si pregunto ¿a qué hora hizo 200^{o} de temperatura? la respuesta es, con seguridad: a ninguna hora.

<u>Una ecuación puede tener una raíz, varias o ninguna.</u>

La función sucesor, $S : \underline{N} \longrightarrow \underline{N}$ da origen a ecuaciones como éstas: $Sx = 1$, $Sx = 2$, etc., en general: $Sx = b$.

Si b es natural y $\neq 1$, la ecuación tiene una sola raíz. Si $b = 1$, no tiene raíz.

Si la función está dada por una fórmula como ésta:

$$Fx = 35 + 60x$$

hacen falta reglas matemáticas para resolver las ecuaciones correspondientes, que iremos estudiando a lo largo de este curso y otros.

Por ejemplo, la ecuación:

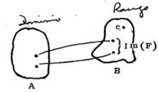
$35 + 60x = 275$

tiene una sola raíz: $x = \frac{275 - 35}{60} = 4$.

Pensemos ahora que toda función F es una relación, y por lo tanto hay una relación inversa F^{-1}, tal que $bFc \Longleftrightarrow cF^{-1}b$. bFc es lo mismo que decir: $Fb = c$.

Al escribir la ecuación $Fx = c$, estoy preguntando cuáles son los elementos que puestos en vez de x satisfacen $Fx = c$, o sea xFc, o sea $cF^{-1}x$. Pero entonces las raíces de $Fx = c$ son la imagen de c por la relación inversa F^{-1} (que no siempre es una función).

Biyecciones



Tomemos una función:

$F : A \longrightarrow B$.

Cada elemento del rango da origen a una ecuación.

Si b es un elemento cualquiera del rango, ¿cómo debe ser la función $F : A \longrightarrow B$ para que todas las ecuaciones $Fx = b$ tengan, ni más ni menos, una solución?

En ese caso hay un solo elemento que puesto en vez de x satisface $bF^{-1}x$, y esto significa que F^{-1} es una función de dominio $B : F^{-1} : B \longrightarrow A$.

Para que haya solución, b tiene que estar en la imagen de F, $b \in \mathrm{Im}(F)$ pues, por definición los elementos de $\mathrm{Im}(F)$ son los valores de F.

Si el rango B tiene puntos que no están en $\mathrm{Im}(F)$, esos puntos dan ecuaciones sin solución. $F x = c$ no tiene solución.

Por lo tanto una condición necesaria es que sea:

rango = imagen $\quad B = \mathrm{Im}(F)$.

Pero para que haya una y solo una solución, a cada punto del rango tiene que llegar una sola flecha. La función no puede llevar puntos distintos del dominio al mismo punto del rango.

Una función que toma valores distintos en distintos puntos del dominio se llama biunívoca: los puntos del dominio y los de la imagen del dominio se corresponden uno a uno.

Ejercicio

4) Puedes ver fácilmente que: si F^{-1} es la relación inversa de una función F, entonces F^{-1} es una función si y solo si F es biunívoca.

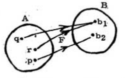
Si una función tiene ambas propiedades:

es biunívoca y rango = imagen

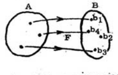
se llama una biyección.

Por lo tanto para que:

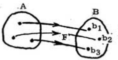
Dada una función $F : A \longrightarrow B$ la ecuación $F x = b$, se pueda resolver para todo punto b del rango, y con una sola raíz para cada b, es necesario y suficiente que F sea una biyección.



$F : A \longrightarrow B$ no es biyección
$Fx = b_1$ tiene dos raíces: r y q
F^{-1} no es función



$F : A \longrightarrow B$ no es biyección
$Fx = b_2$ no tiene raíz
F^{-1} es función de dominio = $= B \sim \{b_2\}$



$F : A \longrightarrow B$ es biyección
rango = $\{b_1, b_2, b_3\}$

$Fx = b_1$, $Fx = b_2$, $Fx = b_3$
tiene una y solo una solución
F^{-1} es función, $\mathscr{D}(F^{-1}) = B$

Ejemplos

La identidad U , es una biyección. El dominio y el rango de U son el mismo conjunto y todo elemento del rango es imagen de sí mismo. Por lo tanto: $Ux = b$ tiene una sola raíz para cada b ; el mismo punto b .

La función sucesor; $S : \underline{N} \longrightarrow \underline{N}$, es biunívoca pero no es una biyección pues el rango de $S \neq \text{Im}(S)$. 1 está en el rango pero no es el sucesor de ningún número. O sea, $Sx = 1$ no tiene solución.

Pero la relación S^{-1} es una función, que hemos llamado "antecesor". $S^{-1}\,10 = 9$, $S^{-1}\,9 = 8$, etc.

F , duplicación: $y = 2x$, de dominio y rango = $\underline{N}$.
Esta función es biunívoca pues para valores diferentes de x da valores diferentes de y , pero no es biyección, pues rango $\neq$ imagen.
En efecto, la imagen de F tiene solo números pares, no es to-

do N ; si b es un número impar, Fx = b no tiene solución.

F = resto de dividir por 5 entre números de N_0 .

Esta función consiste en dividir x por 5 y tomar como valor de y el resto (por defecto). Su tabla es:

¿Cuál es su gráfico?

No es biunívoca, pues, por ejemplo: 1 , 6 , 11 , 16 , ... tienen el mismo resto: 1 .

Además: rango ≠ imagen , Im(F) = $\{0, 1, 2, 3, 4\}$

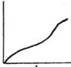
0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	0
6	1
7	2
⋮	⋮

Ejemplos geométricos

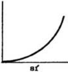
Las rotaciones de un plano son biyecciones como también las traslaciones y simetrías.

¿Cuáles de estos gráficos son biyecciones?

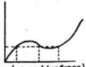
dominio y rango: {números positivos}



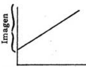
sí



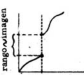
sí



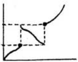
no (no es biunívoca)



no (imagen ≠ rango)



no (imagen ≠ rango)



sí

¿Cuántas funciones diferentes hay de dominio A y rango B ?

Consideremos un conjunto B , por ejemplo de tres puntos : B = $\{b, c, d\}$. Si A tiene un solo punto, llamémoslo 1 , hay tres funciones posibles de A en B , de tablas:

1	b

1	c

1	d

Las tres son distintas y otras no puede haber.

Si A tiene dos puntos - llamémoslos 1 y 2 - ; al 1 puede corresponderle b, c ó d. O sea en su primera línea, la tabla de cualquiera de estas funciones de dominio $\{1, 2\}$ y rango $\{b, c, d\}$, coincidirá con una de las tres tablas anteriores. Al 2 le puede corresponder cualquiera de los valores b, c, d :

1	b
2	b

1	b
2	c

1	b
2	d

Hay pues tres tablas que tienen la línea 1 - b. También podemos formar tres con la línea 1-c y tres con la línea 1 - d.

1	c
2	b

1	c
2	c

1	c
2	d

1	d
2	b

1	d
2	c

1	d
2	d

De cada una de las tablas del primer caso salen entonces, tres. En total tenemos: $3 \times 3 = 9$ tablas.

Si A tiene tres puntos $A = \{1, 2, 3\}$: en sus dos primeras líneas, cada tabla debe coincidir con una de las 9 anteriores, y para la tercera fila hay solo tres posibilidades b, c ó d.

Es decir, cada una de las nueve funciones anteriores da tres nuevas funciones, todas diferentes. En total hay:

$9 \times 3 = 27$ funciones $= (3^3)$.

Si A tiene 4 puntos tendremos el triple de funciones, 3^4, y si tiene n puntos habrá 3^n funciones.

Esto lo hemos hecho para B de 3 puntos, pero el hecho de que fueran 3 solo influyó para multiplicar por 3 el número de funciones cada vez que agregábamos un punto al dominio.

Si B hubiese tenido 100 puntos, podríamos repetir el mismo razonamiento:

Si A tiene 1 punto, hay 100 funciones
Si A tiene 2 puntos, hay 100^2 funciones
- -
Si A tiene n puntos, hay 100^n funciones diferentes.

En general:

Si A tiene n puntos, y B m puntos, hay m^n funciones diferentes de dominio A y rango B.

Ejemplo

Si A tiene n puntos y B es el conjunto formado por las palabras "sí" y "no": B = $\{sí, no\}$, o sea tiene 2 puntos, entonces, según la fórmula hallada, hay 2^n funciones diferentes de $A \longrightarrow B$.

En el capítulo III, al calcular cuántas partes tiene un conjunto vimos que:

un conjunto de n puntos tiene, justamente, 2^n partes.

¿Es casual esta coincidencia? Vamos a ver que tiene una explicación.

Consideremos una de esas 2^n funciones diferentes.

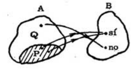
Sea $F : A \longrightarrow B$

F lleva algunos puntos de A a "sí" y otros a "no".

A queda dividida en dos partes o subconjuntos, P y Q :

P , contiene los puntos que van a "sí",

Q , los que son transformados por F en "no"



Es claro que Q es el complemento de P en A ; $Q = A \sim P$, de modo que conociendo P ya conocemos toda la función.

Los puntos de P van a "sí" ,

Los puntos de A que no son de P, a "no" .

Con cada parte de A , S , podemos construír así una función:

en los puntos de S la función vale "sí", en los demás, "no" .

Hay, pues, tantas de estas funciones como partes tiene A : 2^n.

En especial, si tomamos como S todo A :

a todo punto del dominio A le corresponde "sí" .

En cambio, si $S = \emptyset$:

$\emptyset$ no tiene elementos; no hay elementos que valgan "sí"

Los puntos de su complemento valen "no".

O sea:

todo punto de A vale "no" .

Hay, pues, entre estas 2^n funciones, dos funciones constantes (en todo punto del dominio la función toma el mismo valor).

Ejercicios

5) Una relación de equivalencia ¿ puede ser una función?

6) Tengo un conjunto A y cuento sus elementos. Eso es una función. ¿Cuáles son su rango y su dominio? Hacer un esquema de esta función si A tiene 5 puntos, y la tabla correspondiente.

7) Hacer tabla y gráfico de las funciones dadas por las fórmulas:

a) $y = x^2 + 1 - 2x$,
b) $y = x^2 + 20 - 8x$,
c) $y = 10x - x^2 - 6$,
d) $y = 20 - x^2$,

para valores de x comprendidos entre 1 y 4 inclusive. Las curvas que se obtienen se llaman parábolas .

8) Hacer una tabla que represente la función "volumen de la esfera" para los valores del radio $\{2, 4, 5\}$. Tomar $\pi = 3,14$ y después de calcular cada volumen, sacar la parte decimal.

9) Con la tabla del ejercicio anterior hacer el gráfico de esa función. Luego extender la función a los valores intermedios del radio, uniendo los puntos con una curva continua.

¿Cómo extendería esa curva a la izquierda de 2 ?

Obtener a partir del gráfico el volumen de la esfera de radio 3, y comparar ese resultado con el que da la fórmula del volumen.

10) Con la tabla de raíces cuadradas del texto hacer el gráfico de esa función. Extenderlo a los valores intermedios de x dibujando una curva continua.

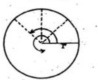
Extenderla a la izquierda hasta $x = 0$.

¿ Cuánto vale $\sqrt{4,84}$ según el gráfico? Comparar con el resultado verdadero.

11) En mi pieza tengo una lámpara de 100 watios, L_1 , otra de 40 watios , L_2 , y un aparato de TV que consume 200 watios. Ayer tuve encendida la lámpara L_1 de 19 a 21 . De 21 a 22 apagué L_1 y encendí L_2 y la TV. De las 22 a las 23 tuve encendido solo la TV, y de 23 a 23y30 solo L_2 . A esa hora apagué todo. Durante el resto del día no había encendido nada.

¿Cuál es el gráfico del consumo de electricidad en mi pieza durante el día de ayer , de 0 a 24 ? (El consumo en cada instante se obtiene sumando los watios de los aparatos que están funcionando.).

12) Dibujar un círculo grande y en él un radio r y a partir de este radio vamos a medir ángulos con vértice en el centro, y siempre en sentido contrario a las agujas del reloj.



A cada ángulo, por ejemplo 45°, le hacemos corresponder un número, de la siguiente manera. Dibujamos el ángulo como hemos dicho (vértice en O y 45° en el sentido inverso al reloj, medidos con un transportador).

Por el punto A en que el nuevo lado del ángulo corta a la circunferencia, trazamos una perpendicular a r , que cortará en B . Medimos con una regla la longitud del segmento (A, B). Este número es el valor de la función correspondiente al punto 45° del dominio.

Repetir esto para los ángulos: 0° , 45° , 90° , 135° , 180° , 225° , 270° , 315° y 360° . Hacer la tabla correspondiente. Dibujar el gráfico de esta función.

13) Resolver la ecuación $Fx = 4$ para cada una de las funciones definidas en los ejercicios 6 , 7 , 10 y la ecuación $Fx = 40$ para la del ejercicio 9 .

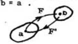
Resolver $Fx = 240$, $Fx = 230$ cuando F es la función del ejercicio 11.

14) ¿Cuáles de las funciones del ejercicio anterior son biyecciones entre el dominio fijado y su rango?

15) Tres alumnos tienen que dar examen. Hay 5 notas posibles : 1, 2, 3, 4 ó 5. ¿De cuántas maneras diferentes puede llenarse la planilla de calificaciones? ¿Cuántas de éstas contienen aplazos, si a partir de 3 (inclusive) se aprueba?

16) <u>Función inversa.</u> Dada una función $F : A \longrightarrow B$ vamos a ver si hay siempre una función F' tal que:

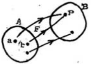
1º) el dominio de F' sea B y su rango sea A : $F' : B \to A$,
2º) el valor de F' en un punto de B (por ejemplo, b) sea el punto de A del cual b es imagen, $F'b = a$.

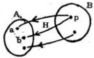


O sea, si en la tabla de F la imagen de a es b , en la de F' la imagen de b es a .

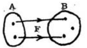
F' se llama función inversa de F .

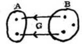
Si tenemos el esquema de una función $F : A \longrightarrow B$, para saber si tiene inversa, tenemos que cambiar el sentido de las flechas y ver si la nueva correspondencia que resulta <u>es función</u> y tiene <u>dominio B</u> .



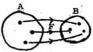


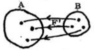
La correspondencia H no es función; transforma el punto p de su dominio en más de un punto. Es solo una relación.





La correspondencia G es función pero su dominio no es todo B.





La correspondencia F' es función y tiene dominio B .

¿Cómo debe ser, entonces, $F : A \longrightarrow B$ para tener inversa?

Demostrar que la función debe ser una biyección.

17) <u>Permutaciones</u>. Otro ejemplo importante de biyecciones son las <u>permutaciones</u>.

Una función de $A \longrightarrow A$ hace corresponder a cada elemento de A, un elemento del mismo conjunto; si esta correspondencia es biyectiva, se llama <u>permutación en A</u>.

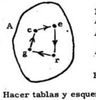
P	
c	g
e	c
g	e
h	h

Si $A = \{c, e, g, h\}$, P es biyección porque: a elementos distintos de la primera columna le corresponden elementos distintos en la segunda (biunívoca).

Además:

$$\mathrm{Im}\,(P) = A = \{c, e, g, h\}$$

Dominio, rango e imagen de una permutación son el mismo conjunto.



Éste es el esquema de otra permutación en A:

A es dominio: de cada punto de A sale una flecha.

A es imagen: a cada punto de A llega una flecha.

Hacer su tabla.

Hacer tablas y esquemas de otras permutaciones en A.

Si hay un conjunto de personas sentadas alrededor de una mesa y las cambiamos de asiento, hemos hecho una permutación. A cada persona le corresponde la que viene a ocupar su sitio.

La función sucesor $S : \underline{N} \longrightarrow \underline{N}$ no es una permutación en $\underline{N}$ pues no es biyección.

Veamos una de las aplicaciones que tienen las permutaciones.

Tenemos un conjunto totalmente ordenado, por ejemplo el $A = \{a, b, c, d\}$ que se ha ordenado alfabéticamente: primero: a; segundo: b; tercero: c; cuarto: d.

Podemos darle otro orden total; por ejemplo:

b c a d

La función que hace corresponder a cada elemento del primer orden el que ocupa el mismo lugar en el orden nuevo es una permutación en A.

$$\begin{array}{cccc} a & b & c & d \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ b & c & a & d \end{array}$$

Q	
a	b
b	c
c	a
d	d

O sea, las permutaciones nos indican cómo pasar de un orden total a otro, en un mismo conjunto totalmente ordenado.

De estas funciones hay tantas como maneras diferentes de ordenar A , que son 4! = 24 y, si A tiene n elementos, hay n! permutaciones.

Una de ellas es la identidad.

Para definir más rápido una permutación, la de tabla Q , por ejemplo, en vez de escribir la tabla anterior, se hace así:

Se pone el primer elemento a y a su derecha su imagen, b :

a, b

Luego la imagen de b , que es c :

a , b , c

La imagen de c es a ; en lugar de escribir otra vez a se encierran los elementos ya escritos entre paréntesis: el último elemento de un paréntesis se transforma en el primero:

(a , b , c)

Luego, con las letras restantes se hace lo mismo. En este caso solo queda d que pasa a ser, también, d .

La tabla de F queda resumida así:

(a, b, c) (d)

Si escribo

(a, d) (b, c)

¿qué función es?

a pasa a d y d , como sigue paréntesis, pasa a ser a ; b va a c y c a b .

O sea la tabla de esta función es:

a	d
d	a
b	c
c	b

La tabla de (a , c , d , b) es:

a	c
c	d
d	b
b	a

La tabla de (a)(b)(c,d) es:

a	a
b	b
c	d
d	c

Las letras que están solas en un paréntesis pueden omitirse. Si una letra no figura, entenderemos que se transforma en sí misma.

Así, si en la permutación

(a, d)

faltan b y c , es porque b pasa a ser b y c pasa a ser c .

Cualquier permutación en A conduce a un nuevo orden total en el cual el primer elemento es la imagen del que era primero, y así sucesivamente.

18) En la numeración, los símbolos especiales 1, 2, 3, . . . 0 no tienen ninguna importancia. Tampoco es importante que los dígitos sean diez: pueden ser cualquier cantidad mayor que uno. En muchas computadoras es común usar solo dos dígitos: 0 y 1 ; es lo que se llama numeración binaria.

Un número binario es un conjunto finito de ceros y unos, ordenados de izquierda a derecha, empezando con un uno. O sea es como un número común pero las únicas cifras que aparecen son 0 y 1 .

1 , 10 , 101 , 11110

son números binarios.

El sucesor de un binario se obtiene así:

1º) si termina en 0, se cambia ese 0 por 1 ,
2º) si termina en 1 se cambia ese 1 por 0 y se lee la cifra anterior; si es 0 se cambia por 1 y si no, se repite todo. Si se acaban las cifras se pone 1 a la izquierda.

Ejercicios:
Hacer el diagrama de flujo de esta función.
¿Cuál es el sucesor de 1011 ? ¿111? ¿1 ?
Escribir los primeros veinte números binarios.
¿ A qué números decimales corresponden los binarios siguientes:
10 , 100 , 1000 , 10000 , 1010 , 1011 ?

Capítulo VIII

OPERACIONES BINARIAS

Desde la escuela primaria conocemos varias "operaciones" con números: suma, resta, multiplicación, división, etc.

En todas ellas se da un par de números - por ejemplo, 12 y 3 - y se obtiene un resultado: 15 , 9 , 36 , 4 , según de qué operación se trate. A cada par de números - como 12 y 3 - una operación le hace corresponder otro número, que es el resultado de la operación. El par en general tiene que estar ordenado pues aunque para la suma y multiplicación no importa el orden, para restar y dividir, sí.

Entonces:

Una operación entre números es una correspondencia o relación entre un par ordenado de números y otro número.

Como cada operación da un solo resultado, se trata de una función, no de una relación cualquiera.

Las operaciones entre números se definen en la escuela por tablas: tablas de sumar y de multiplicar.

En estas tablas no figura el dominio en una columna y su imagen en otra. Como cada punto del dominio es un par de números resulta más práctico darle otra disposición.

La tabla de multiplicar, sin duda se podría escribir así:

(1, 1)	1
(1, 2)	2
(2, 1)	2
(2, 2)	4
(1, 3)	3
(2, 3)	6
(3, 1)	3
(3, 2)	6
(3, 3)	9

Cada número de la segunda columna es el resultado de multiplicar los dos de la primera, que están en la misma línea.

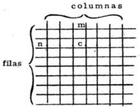
Pero resulta más cómodo escribirla así:

		primera columna	segunda columna	tercera columna	
		1	2	3	4 ...
Primera fila	1	1	2	3	.
Segunda fila	2	2	4	6	.
Tercera fila	3	3	6	9	.
	4 ⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

El número de cada casilla es el resultado de multiplicar el que encabeza su fila por el que encabeza su columna.
Ejemplo: 2 multiplicado por 3 da 6 .

Matrices

. Las tablas de operaciones dispuestas como ésta se llaman matrices. Una matriz tiene filas y columnas; a cada fila y columna le ponemos el nombre de un número y en la casilla en que se cruzan la fila n y la columna m se pone el resultado de la operación realizada con n y m , (siendo n el primer número del par y m el segundo).



Dominio de una operación

Se pueden definir muchas operaciones entre números y aun entre objetos que no son números.

Si tenemos un conjunto cualquiera A , que no sea vacío, cualquier función T que haga corresponder a cada par ordenado de elementos de A otro elemento de A , es una operación de A o entre los elementos de A . El alcance de T tiene que estar formado por todos los pares ordenados de elementos de A ; el rango es A. La imagen, como veremos puede ser o no todo el rango. Cuando no se dice nada sobre el dominio, se supone que coincide con el alcance, o sea que la operación se puede efectuar entre todos los pares ordenados de elementos de A . Pero no siempre es así: si A es el conjunto de los números naturales N , la división exacta tiene un dominio más chico que su alcance. Hay pares ordenados de números (ejemplo: 10 , 3) a los que no le corresponde como resultado un número natural. En casos así diremos que se trata de una operación incompleta. La división exacta es, pues, incompleta en N .

Suma y multiplicación en N tienen dominio = alcance . La resta es incompleta en N .

Hablamos de operación binaria porque el dominio está formado por pares. Hay también operaciones ternarias cuyo dominio está formado por ternas, etc.

Sea T una operación binaria en A , es decir, T es una función de rango = A y alcance = {pares ordenados de elementos de A}. Recordemos que a este conjunto lo hemos llamado A x A . Alcance de T = A x A .

Siendo T una función, si su valor en el par a, b es c , deberíamos escribir:

$$T(a,b) = c \ .$$

Pero es costumbre poner el símbolo de la operación entre los dos elementos del par:

$$aTb = c$$

(a la izquierda de T va siempre el que es primero) como si fuera una relación entre a y b . Atención y no confundirse: si T fuera una relación, aTb sería algo verdadero o falso, como " a es tío de b " . En cambio si es una operación, como + , a+b no es ni cierto ni falso. Lo que es cierto o falso es que a+b = c . La relación es entre c y el par (a, b) .

$$aTb = c$$

se lee: c es el resultado de aplicar la operación T al par a, b , o de operar a con b .

La suma tiene su símbolo propio, + :

$a + b = c$,

se lee: " a más b igual a c ".

Sabemos también lo que significan:

$a - b = c$, $a \times b = c$, $a \,\%\, b = c$.

Cada una de estas operaciones , ¿ en qué conjunto de números está definida? En otras palabras, ¿cuál es el dominio y el rango de cada una?

+ y × están definidas en N: se puede sumar y multiplicar todo par de números naturales y el resultado es otro número natural.

$+ : N \times N \longrightarrow N$; $\times : N \times N \longrightarrow N$

La resta no esta definida en todo N : si queremos restar dos números naturales y que el resultado esté también en N , el primero debe ser mayor que el segundo. Es incompleta en N .

La división exacta es incompleta en N .

Veamos qué ocurre con la división entera, de símbolo % .

Se define así:

n % m = el mayor número natural que multiplicado por m da un número menor o igual que n .

Tiene resultado en N para todo par de números naturales, con tal que el primero sea mayor o igual que el segundo.

Como $0 \notin N$, no podemos decir, por ejemplo, que $2 \,\%\, 3 = 0$.

La división entera es incompleta en N .

	1	2	3	4
1	1	X	X	X
2	2	1	X	X
3	3	1	1	X
4	4	2	1	1

Pero si la comparamos con la división exacta, encontramos que hay más pares de números que tienen resultado. Además, cuando la división exacta puede hacerse, coincide con la entera; entonces, recordando qué es extensión de una función:

La división entera es una extensión de la exacta.

Si en lugar de definir la división entera en $\underline{N}$, lo hacemos en $\underline{N}_0$, casi todas las divisiones son posibles. Solo no tienen resultado las divisiones por 0 .

	0	1	2	3
0	×	0	0	0
1	×	1	0	0
2	×	2	1	0
3	×	3	1	1

Más operaciones en N

Podemos inventar muchas operaciones en $\underline{N}$: basta decir por medio de palabras, o con fórmulas o con una tabla o matriz cuál es el resultado para cada par de números.

Una operación muy fácil es la que llamaremos máximo. Hace corresponder a todo par de números naturales el mayor de los dos y, si son iguales, el mismo número. Su símbolo es $\vee$. Por ejemplo:

$3 \vee 5 = 5$, $17 \vee 8 = 17$, $90 \vee 90 = 90$

Su matriz sería:

	1	2	3	4	.
1	1	2	3	4	.
2	2	2	3	4	.
3	3	3	3	4	.
. . . .					

También podemos definir la operación mínimo, simbolizada por $\wedge$:

$a \wedge b =$ el menor de los dos .

$3 \wedge 5 = 3$, $17 \wedge 8 = 8$, $90 \wedge 90 = 90$.

Ejercicio

1) ¿Cómo es su tabla o matriz ?

Otras dos operaciones interesantes son el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo, de símbolos $\overline{\wedge}$ y $\underline{\vee}$ respectivamente.

Vamos a definir las dos entre los elementos de $\underline{N}$.

$a \overline{\wedge} b$ es el mayor de todos los números naturales que dividen a a y b .

Así:

$4 \overline{\wedge} 6 = 2$, $9 \overline{\wedge} 8 = 1$, $1 \overline{\wedge} 5 = 1$.

La regla para hallar el resultado es tomar los factores primos comunes a ambos, con su menor exponente y multiplicarlos. Un diagrama equivalente puede verse en el ejercicio Nº 16 .

El mínimo común múltiplo se define así:

$a \underline{\vee} b$ es el menor de los números que son múltiplos a la vez de a y b .

$4 \veebar 6 = 12$, $9 \veebar 8 = 72$, $1 \veebar n = n$.

2) ¿Cuáles son las reglas para calcular $a \veebar b$?

La potenciación Pot se define así:

a Pot $b = a^b$,

siendo $a^b = a \times a \times a \times \ldots \times a$ b veces si $b > 1$, y $a^1 = a$.

Todas éstas tienen alcance = dominio = $\underline{N} \times \underline{N}$.

Nótese que en la operación Pot , el orden de los operandos es importante.

2 Pot $3 = 2^3 = 8$ no es lo mismo que 3 Pot $2 = 3^2 = 9$.

Cuando, en una operación, el orden de los operandos no importa, la operación es <u>conmutativa</u>.

Pot no es conmutativa. Tampoco lo son la resta ni la división.

$+$, $\times$, $\wedge$, $\vee$, $\overline{\wedge}$, $\veebar$ son conmutativas.

Podemos definir operaciones más arbitrarias entre números.

Por ejemplo una función C dada por:

a C b = 34 cualquiera sea a ó b

sí es una operación, pues a cada par ordenado de números le adjudica un resultado o valor: siempre 34. Es conmutativa y muy fácil de efectuar. Pero no es útil; no vale la pena ocuparse de ella.

Trata de definir otras análogas.

Operaciones entre conjuntos

Dijimos que se podía operar con cosas que no fueran números . Ya conocemos algunos ejemplos; las operaciones entre conjuntos.

La unión de A y B, $A \cup B$ es otro conjunto que sabemos construir.

La operación $\cup$ es conmutativa.

Además: $A \cup A = A$ (la unión de A y A es A) .

Por eso se dice que $\cup$ es <u>idempotente.</u>

3) ¿Cuáles de las operaciones en $\underline{N}$ que hemos definido son idempotentes?

La operación $\cap$ es conmutativa e idempotente entre conjuntos:

$A \cap B = B \cap A$; $A \cap A = A$,

no importa cuáles sean sus elementos.

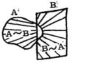
La inclusión $\subset$ <u>no</u> es una operación sino una relación.

$A \subset B$ no es un conjunto, es una proposición: " A está incluido en B " .

La diferencia de conjuntos, $\sim$, definida como sabemos:

$A \sim B$ es el conjunto de los puntos de A que no están en B , es una operación.

No es conmutativa pues:



$A \sim B$ no es lo mismo que $B \sim A$.

Tampoco es idempotente:

$A \sim A \neq A$

en general, pues $A \sim A = \emptyset$.

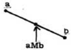
Operaciones entre puntos de un plano

Un ejemplo de estas operaciones es el siguiente:

Si a y b son dos puntos del plano P , llamemos:

a M b

al punto medio del segmento de extremos a y b .



M es conmutativa. Además es idempotente:

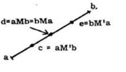
aMa = a para todo a $\in$ P ,

pues aquí todo el segmento se reduce al punto a

Un poco más complicado será definir como resultado, no el punto medio del segmento, sino el que está en el extremo del primer cuarto, yendo de a hacia b .

Llamemos a esta operación M'.

M' no es conmutativa:



aM'b $\neq$ bM'a ,

pero sí idempotente:

aM'a = a para todo a $\in$ P

Composición de funciones

Muy importante es una operación que se realiza entre funciones y se llama composición de funciones.

Componer dos funciones quiere decir aplicarlas una después de otra; una al resultado de la otra.

Expliquemos esto sobre el esquema de dos funciones T y S .

T transforma a cada punto de su dominio A en un punto de su rango B . $T : A \longrightarrow B$.

S hace lo mismo con los puntos de su dominio A' y su rango B' . $S : A' \longrightarrow B'$.

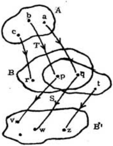
El punto a de A es transformado por T en q , y como q está también en A' (dominio de S), q es transformado por S en w .

Resultado final: a se transforma en w .

Lo mismo pasa con b ; T lo transforma en p , y S transforma p en v . Resultado final: b se transforma en v .

Pero no pasa lo mismo con c ; T lo transforma en r y S no se puede aplicar a r porque $r \notin \mathfrak{D}(S)$, que es el conjunto A' .

O sea: el punto c de A no se podrá transformar en un punto de B' y por lo tanto, c no está en el dominio de esta función compuesta de T y S .



Olvidémonos de los pasos intermedios y miremos el resultado final de esta doble transformación:

a se transforma en w : a $\longrightarrow$ w .
b se transforma en v : b $\longrightarrow$ v .

Es una correspondencia entre dos puntos de $A = \mathfrak{D}(T)$ y B' = = rango de S y esta correspondencia no puede ser otra cosa que una función. Pues si bien es posible que algunos puntos de A queden sin correspondiente en B' (como el c), no es posible que a un punto de A le corresponda más de un punto de B' (¿Por qué? Recordar que T y S son funciones .) A la nueva función, resultado de aplicar las dos, se la llama composición de T y S y se simboliza: S o T con un cerito entre las dos; la que se aplica primero se pone a la derecha. Escrita de este modo se pone en evidencia cuáles son las transformaciones que hay que hacer, pero si no queremos prestar atención a los pasos intermedios, podemos nombrar a esta función, por una letra; por ejemplo, R .

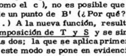
El alcance de R es A .

El dominio de R está formado por algunos puntos de A , a veces todos, a veces ninguno.

En el ejemplo, $\mathfrak{D}(R) = \{a, b\}$. Su imagen está formada por puntos de B' , $\operatorname{Im}(R) = \{v, w\}$.

Su rango es el rango de la segunda función, o sea B' pues los puntos de B' son los posibles elementos a los que R puede llevar los puntos de su dominio.

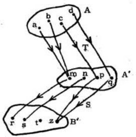
Al componer dos funciones, $T : A \longrightarrow B$ y $S : A' \longrightarrow B'$ puede ocurrir lo que muestra el esquema: ninguna flecha de la transformación T llega a A' : la imagen de T y el dominio de S son disjuntos.



Por lo tanto ningún punto que esté en la imagen de A será transformado por S y la composición S o T no hará corresponder a ningún elemento de A un elemento de B' . ¿Qué es entonces SoT, ó R ? no merece llamarse función pues no se puede aplicar a nada. Pero vamos a dejarle igual ese nombre y para diferenciarla la llamaremos función vacía .

La función vacía es la que tiene su dominio vacío y por lo tanto su imagen vacía.

Este es el esquema de una composición de funciones T y S que transforman cada punto de A - dominio de T - en un punto de B' . Cuando esto ocurre es porque la imagen de T es parte del dominio de S : Im(T) $\subset$ A' .



a es transformada por T en m , y

m es transformada por S en r .

Indiquémoslo así:

$a \longrightarrow m \longrightarrow r$.

Del mismo modo:

$b \longrightarrow m \longrightarrow r$,

$c \longrightarrow p \longrightarrow z$,

$d \longrightarrow q \longrightarrow z$.

Entonces: $T : A \longrightarrow B$, $S : A' \longrightarrow B'$.

$m = Ta$ y $Sm = r$.

Si en la segunda igualdad ponemos Ta en vez de m ,

$r = S(Ta)$.

Hemos agregado los paréntesis para indicar que Ta es el nombre de un elemento. Siempre lo que está entre paréntesis es el nombre de un objeto.

También:

$m = Tb$ y $Sm = r$,

entonces:

$r = S(Tb)$.

Del mismo modo:

$z = S(Tc) = S(Td)$.

s y t en cambio no están en la imagen de SoT .

Veamos otro ejemplo de composición de funciones:

En una fiesta se hace una rifa y los números se reparten entre los invitados: hay tantos números como invitados y a cada invitado se le regala un número.

A es el conjunto de los invitados

B es el conjunto de los billetes de rifa
B' es el conjunto de los premios.
Los elementos de A son personas identificadas por sus nombres: $A = \{a, b, c, \ldots, h\}$.
Los de B son papeles identificados por los números que llevan impresos: $B = \{1, 2, 3, \ldots, 8\}$.
Los de B' , objetos diversos identificados como $1^o, 2^o, \ldots, 8^o$ premio: $B' = \{1^o, 2^o, 3^o, \ldots, 8^o\}$
Podemos definir la función:
$T ; A \longrightarrow B$
que hace corresponder a cada invitado su billete de rifa.
Se puede dar por esta tabla:

	T
a	8
b	5
c	1
d	7
e	3
f	2
g	6
h	4

$S : B \longrightarrow B'$ es la función que, a cada billete, le hace corresponder el premio que la suerte le asignó.
También podemos definirla por una tabla S :

	S
1	8^o
2	4^o
3	2^o
4	1^o
5	7^o
6	5^o
7	6^o
8	3^o

La composición de estas dos funciones nos va a dar la correspondencia entre los invitados y los premios que ganaron. Construyamos la tabla de SoT guiándonos por las tablas T y S .
Empecemos con el invitado a .
Según T : al Sr. a le corresponde el billete 8, y según S : al billete 8 le corresponde el premio 3^o ; entonces en la tabla de SoT pondremos que: al invitado a le corresponde el premio 3^o.
Más breve:
$a \xrightarrow{T} 8 \xrightarrow{S} 3^o$
Del mismo modo:
$b \xrightarrow{T} 5 \xrightarrow{S} 7^o$

	S o T
a	3^o
b	7^o
c	8^o
d	6^o
e	2^o
f	4^o
g	5^o
h	1^o

Hagamos lo mismo con cada uno de los demás invitados y tendremos la tabla de SoT .
En este ejemplo, B , conjunto de los billetes de rifa es, a la vez, imagen de la primera función T y dominio de la segunda, S. Por eso:
cada invitado tiene su premio correspondiente.

El dominio de SoT es todo A (como en el último esquema de composición de funciones).

Según las tablas del ejercicio anterior:

T a = 8 y S 8 = 3° ; entonces: S (T a) = 3°

¿Cuánto vale S (T b) ? Lo primero que tenemos que hacer es ver qué elemento es T b . La tabla de T nos dice que b se transforma en 5 ; T b = 5 . Entonces S (T b) = S 5 . Vamos a la tabla S y en ella leemos que S 5 = 7° . O sea: S (T b) = 7° .

¿Cuál es el valor de S (T e) , S (T g) , S (T h) ?

¿Es cierto que S (T c) = 8° , S (T f) = 4° , S (T d) = 6° ?

En este esquema representamos solo las transformaciones que sufre un elemento c en una composición SoT .

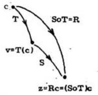
El resultado de aplicar SoT a c es z :

(SoT) c = z .

SoT está entre paréntesis porque es el nombre de <u>una</u> función.

Pero dijimos que para llegar a z primero hay que hallar Tc y a Tc hay que aplicarle S : z = S(T c) .

Entonces: (SoT) c = S (T c) .



Ejercicios

4) Si tenemos que aplicar una composición PoQ a un elemento a , ¿cómo escribiremos que el resultado, (PoQ) a , se obtiene aplicando primero Q y a la imagen de a por Q , la transformación P ?

5) Repetir el ejercicio para (VoZ) a , (PoQ) b , (MoX) v

Otro ejemplo de composición de funciones.

Si M_3 es la función que a cada número natural le hace corresponder el triple, o sea:

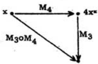
$M_3 : \underline{N} \longrightarrow \underline{N}$ y $M_3 a = 3 \times a$,

y M_4 es la función que transforma a cada número natural en su cuádruplo:

$M_4 : \underline{N} \longrightarrow \underline{N}$ y $M_4 b = 4 \times b$,

veamos cuál es $M_3 o M_4$.

Si tengo $x \in \underline{N}$ y le aplico M_4 obtengo $v = 4x$. A este resultado le aplico M_3 y obtengo: $M_3 v = M_3 (4x) = 3 \times (4x) = 12x$.



Entonces, si M_{12} es la función que consiste en multiplicar por 12 los números naturales, podemos asegurar que se cumple

$$M_3 o M_4 = M_{12}$$

Es inmediato también que:

$$M_4 o M_3 = M_{12}$$

Es lo mismo multiplicar un número cualquiera x por 3 y al resultado por 4, que multiplicar a x por 12

Si S_5 es la función que consiste en sumar 5 a los números naturales, o sea:

$S_5 : \underline{N} \longrightarrow \underline{N}$ y $S_5 x = 5 + x$,

la composición de S_5 y M_3 depende del orden en que se haga.

Si empezamos por M_3 :

$(S_5 o M_3) x = S_5(M_3 x) = S_5(3x) = 5 + (3x)$.

Si empezamos por S_5 :

$(M_3 o S_5) x = M_3(S_5 x) = M_3(5+x) = 3 \times (5+x)$.

y estas dos funciones no son iguales pues, por ejemplo, para x = 2, una da 11 y la otra 21 .

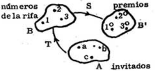
El orden es casi siempre importante en la composición de funciones. En el ejemplo de la rifa aplicábamos T y después S :

T hacía corresponder a cada invitado un número de rifa,

S a cada número de la rifa, un premio.

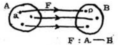
Si quisiéramos empezar con S y seguir con T nos encontraríamos con sorpresas. Pues si S transforma a cada número de la rifa en un premio, en la imagen de S solo hay premios. Pero a ningún premio se le puede aplicar T pues el dominio de T está formado únicamente por los invitados.

B' , imagen de S , y A , dominio de T , son disjuntos.

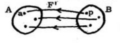


Cuando esto ocurre, vimos ya que el dominio de ToS es vacío; ToS es una función vacía, y por lo tanto en este ejemplo: ToS ≠ SoT

Composición con la función inversa



Si una función F : A → B tiene inversa, que llamaremos F' , y se compone con ella, el resultado es la identidad U del conjunto A .



Recordemos que la función inversa de F : A ⟶ B tiene por dominio B y por rango A . Además , si F transforma un punto a en p , F' transforma p en a ; vuelve el punto p al punto a .

Recordemos también que la función identidad U de un conjunto A es: U c = c para todo c ∈ A .

El resultado de F'oF es que a cada punto de A le corresponde el mismo punto. O sea, la identidad en A

F'oF = U , U , identidad en A .

Si aplicamos primero F' y después F , el dominio de la transformación es B y la composición de F' y F deja todos los puntos de B donde estaban.

FoF' = U , U , identidad en B .

O sea, la composición de F y F' en cualquier orden en que se aplique da la identidad del dominio correspondiente.

F'oF = FoF' = U , identidad en A o en B

Operaciones en un conjunto cualquiera

Ya hemos visto muchos ejemplos de operaciones pero es fácil construir muchísimos más.

Si formamos una matriz cuyas filas y columnas tengan los nombres de los elementos del conjunto A :

$$A = \{a, b, c, \dots\}$$

	a	b	c	d
a	a	b	b	a
b	d	b	b	a
c	a	d	a	d
d	d	b	d	d

y en las casillas ponemos elementos de A como se nos dé la gana (todos o algunos, o uno solo, en cualquier orden), habremos definido una operación T :

el resultado de xTy está en la casilla de fila x y columna y .

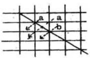
Es claro que esta operación quizá no sirva para nada práctico . Pero es útil "fabricar" operaciones por medio de matrices , así podemos inventar casos raros y darnos cuenta de muchas cosas que pueden ocurrir en las operaciones.

Las propiedades de las operaciones se reflejan en propiedades de sus matrices.

Por ejemplo, ¿cómo debe ser la matriz de una operación conmutativa?

Si

x T y = y T x



eso significa que debe figurar el mismo elemento de A en la casilla de fila x , columna y, y en la casilla de fila y , columna x .

Si filas y columnas están ordenadas de la misma manera, entonces la matriz debe ser simétrica con respecto a la diagonal que cruza de arriba-izquierda a abajo derecha. O sea, si doblamos el papel a lo largo de esta diagonal .

que se llama diagonal principal, las casillas que se superponen deben tener elementos iguales.

Por lo tanto, si queremos "fabricar" una operación conmutativa, podemos poner cualquier cosa por encima de esa diagonal y luego llenar la parte inferior por simetría.

En la diagonal también podemos poner lo que se nos antoja.

T	Juan	Pedro	Diego
Juan	Pedro	Diego	Juan
Pedro	Diego	Pedro	Juan
Diego	Juan	Juan	Pedro

esta operación es conmutativa.

T'	Juan	Pedro	Diego
Juan	P	D	J
Pedro	D	P	J
Diego	J	D	P

esta operación no es conmutativa.

¿Cómo debe ser la matriz para que T sea idempotente?

Asociatividad

Cuando tenemos que multiplicar tres números como:

$$5 , 8 , 13 ,$$

lo hacemos en dos pasos:

1º) multiplicamos dos de ellos

2º) multiplicamos el resultado por el que queda.

Los dos que se multiplican primero se eligen como se desee. Pueden ser el primero y el segundo, el segundo y el tercero, el primero y el tercero; el resultado final siempre será el mismo.

¿Ocurrirá esto con todas las operaciones?

Observemos lo que pasa con una operación T, definida sobre un dominio A, de tres elementos, $A = \{a, b, c\}$, por esta matriz:

	a	b	c
a	a	c	b
b	c	b	b
c	b	b	a

Si queremos operar con los tres elementos, a, b y c y empezamos por los dos primeros, tendremos, de acuerdo con la matriz:

$aTb = c$ y luego $cTc = a$.

Con los dos últimos primero:

$bTc = b$ y luego $a T b = c$.

Y empezando con el primero y el tercero:

$a T c = b$ y luego $b T b = b$.

Obtenemos, pues, tres resultados diferentes. Y eso que esta operación es conmutativa (su matriz es simétrica respecto a la diagonal principal), lo que limita el número de posibles resultados diferentes.

Para indicar cada una de estas tres posibilidades, lo más cómodo es usar paréntesis:

$(aTb)\,T\,c = a$, $a\,T\,(bTc) = c$, $(aTc)\,T\,b = b$.

Como siempre, los paréntesis indican que lo encerrado entre ellos es un solo elemento: el resultado de hacer las operaciones allí indicadas. Si escribiéramos simplemente: aTbTc , sin paréntesis, no sabríamos cuál de las tres cosas quiere decir.

Dada una operación S si se opera con dos elementos, sabemos lo que significa

$$x S y$$

Pero cuando tenemos que operar con tres, aunque se den ya ordenados: x , y , z , no está definido lo que debe entenderse por

$$x S y S z \ .$$

Hay dos posibilidades:

hacer primero xSy , que indicaríamos: (xSy) S z

o hacer primero ySz , que indicaríamos: x S (ySz).

(Como se ha fijado un orden para los operandos: primero x , segundo y , y tercero z , ya no podemos empezar con xSz)

Si sucediera - como con la matriz anterior - que:

$$(xSy)Sz \neq xS(ySz) \ ,$$

es indispensable usar paréntesis para aclarar de cuál de las dos expresiones estamos hablando.

Si, en cambio, S es tal que

$$(xSy)\,S\,z = x\,S\,(ySz)$$

para todas las ternas de elementos x, y, z no hay que preocuparse de los paréntesis. Entonces podemos escribir:

$$x S y S z \ ,$$

porque de cualquier modo que los calculemos (pero siempre respetando el orden x, y, z) tendremos el mismo resultado.

Una operación T se llama asociativa si:

$$(uTv)\,T\,w = u\,T\,(vTw)$$

para cualquier terna de elementos u, v, w de su dominio.

La suma y la multiplicación son asociativas. La resta, no:

$(10 - 5) - 3 = 2$ y $10 - (5 - 3) = 8$

de modo que los paréntesis son indispensables. Pero luego veremos que, por convención, la expresión escrita sin paréntesis:

$$10 - 5 - 3$$

significa lo mismo que :

$$(10 - 5) - 3 \ .$$

La composición de funciones es siempre asociativa. Si F , G y H son tres funciones:

(HoG) o F y H o (GoF)

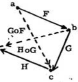
significan la misma cosa: aplicar primero F , luego, al resultado, aplicar G y, a este nuevo resultado, aplicar H .

Verifíquese como ejercicio en la figura de la página siguiente.

Podemos, pues, escribir:

HoGoF

sin paréntesis, porque el resultado es el mismo de cualquier modo que lo calculemos. Pero, se entiende, respetando el orden pues, como ya vimos, la composición de funciones no es conmutativa.



Ejercicios

6) ¿La división es asociativa? No; verificarlo.

$\vee$, máximo, es asociativa. Si tenemos, por ejemplo, estos tres números: 8 , 7 , 3 ,

$(8 \vee 7) \vee 3$ da lo mismo que $8 \vee (7 \vee 3)$

$8 \vee 7 = 8$ y $8 \vee 3 = 8$, $7 \vee 3 = 7$ y $8 \vee 7 = 8$,

y lo mismo pasa con números cualesquiera: a , b , c . En:

$a \vee b \vee c$

no hace falta colocar paréntesis.

7) $\wedge$, $\underline{\vee}$, $\overline{\wedge}$, $\cup$, $\cap$, también son asociativas. Verificarlo.

8) La operación punto medio de dos puntos, M , no es asociativa.

Cuando una operación es asociativa, se puede escribir sin paréntesis también para más de tres elementos (siempre respetando el orden). De cualquier modo que se calcule dará el mismo resultado.

$(aSbSc)\,S\,d = (aSb)S(cSd) = a\,S\,(bScSd)$.

Probemos por ejemplo, la primera igualdad.

Llamemos

$$e = aSb \ .$$

Sabemos que S es asociativa, o sea que:

$$aSbSc = (aSb)\,S\,c = eSc \ ,$$

entonces:

$$(aSbSc)\,S\,d = (eSc)\,S\,d \ ,$$

y, por ser asociativa,

$$(eSc)\,S\,d = e\,S\,(cSd) \ ,$$

o sea:

$$(aSbSc)\,S\,d = e\,S\,(cSd) \ .$$

Si ponemos donde está e , su definición:

$$(aSbSc)\,S\,d = (aSb)S(cSd) \ .$$

Verifíquese la otra igualdad. ¿Hay otras posibilidades?

Por lo tanto, para cuatro elementos también podemos escribir

$$a\, S\, b\, S\, c\, S\, d$$

sin paréntesis, si S es asociativa.

Y lo mismo si hay más de cuatro elementos.

Si S no es asociativa la escritura se complica, pues tenemos que indicar en qué orden hay que hacer las operaciones.

Así:

$$a\, S\, ((bSc)\, S\, d)$$

significa que hay que operar a con el resultado de operar bSc con d . En la expresión figuran dos pares de paréntesis; cuando hay dos o más pares, es preciso aclarar cuáles forman par.

Lo más cómodo es usar distintos símbolos de paréntesis:

paréntesis comunes:	( )	
corchetes :	[ ]	
llaves :	{ }	etc.

En vez de:

$a\, S\, ((bSc)\, S\, d)$,

escribiríamos:

$a\, S \left[(bSc)\, S\, d\right]$,

que se entiende más fácilmente; lo que está entre corchetes es el nombre de un elemento: el que se obtiene haciendo la operación S entre el elemento (bSc) y el elemento d .

Los corchetes se usan para encerrar paréntesis y las llaves para encerrar corchetes:

$$\left\{\left[(2 \barwedge 6)3\right] \cdot/.6\right\} \wedge 7 \ .$$

Esto indica que la operación $\wedge$ hay que hacerla entre 7 y el número que resulta de hacer lo que está escrito entre llaves, o sea dividir por 6 lo que está escrito entre corchetes, o sea, ... etc.

Si no se pueden usar corchetes y llaves y hay muchos paréntesis, la regla para saber cuáles forman par es:

1º) Cada paréntesis izquierdo, "(" , está apareado con un paréntesis derecho, ")" ; tiene que haber igual cantidad de ambos o hay error.

2º) Se recorre la expresión de izquierda a derecha hasta encontrar el primer paréntesis derecho,) , y se vuelve hacia atrás hasta encontrar uno izquierdo, (; estos dos van juntos.

$$\underset{\ \ \ 1}{(((}A \cap \dot{B}\underset{1}{)} \cup C) \cup M) \cap (S \sim T) \ .$$

Se excluye el par formado y se sigue la misma regla para formar otro par. Si no hay paréntesis izquierdo a la izquierda de un paréntesis derecho, hay error.

Ejemplos

Ponemos el mismo número debajo de los paréntesis que van apareados en cada una de las siguientes series de operaciones:

$$(((A \cap B) \cup C) \cup M) \cap (S \cap T)$$
3 2 1 1 2 3 4 4

$$(((6-4) \times 3) + (8 : 2)) \times (4 + (3-1)) = 60$$
4 2 1 1 2 3 3 4 6 5 5 6

$$3 \times ((6 + 4 \times (2-1)) \times (5-3)) = 60$$
4 2 1 1 2 3 3 4

Unidad

En la multiplicación de números hay un elemento distinguido, el 1, porque tiene una propiedad especial.

Si a un número cualquiera a lo multiplicamos por 1 el resultado es el mismo número a :

$$a \times 1 = 1 \times a = a$$

Es decir: sea a el primero o el segundo operando, el resultado de la multiplicación es también a si el otro operando es 1. Por eso se dice que 1 es la <u>unidad</u> de la multiplicación.

La suma tiene también unidad: es el 0 pues, para cualquier a:

$$a + 0 = 0 + a = a$$

¿La intersección de conjuntos, tiene unidad?

Consideremos un conjunto cualquiera A. ¿Hay algún conjunto tal que la intersección de A con él sea el mismo conjunto A ? Sí; la intersección de A y el conjunto universal I es A. Como $\cap$ es conmutativa:

$$A \cap I = I \cap A = A$$

La unidad de $\cap$ es I.

La unión de conjuntos tiene por unidad el conjunto vacío, $\emptyset$:

$$A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A$$

Pensemos en la operación mínimo común múltiplo, $\underline{\vee}$.

Tenemos un número cualquiera, n. ¿Con qué número tiene n que formar par para que el mínimo común múltiplo de los dos números sea, precisamente, n ? Si n es cualquiera (primo o no, no sabemos) solo podemos asegurar que el par n, 1 (ó 1, n) tiene como mínimo común múltiplo a n :

$$n \underline{\vee} 1 = 1 \underline{\vee} n = n.$$

1 es la unidad de $\underline{\vee}$.

¿Tiene unidad la operación máximo común divisor $\overline{\wedge}$?

Hay que pensar si se puede formar con n y otro número un par tal que el mismo n sea máximo común divisor de los dos.

Si n es cualquiera (primo o no) solo del par n, 0 (ó 0, n) se podrá afirmar que tiene n por máximo común divisor.

$n \,\overline{\wedge}\, 0 = 0 \,\overline{\wedge}\, n = n$

O sea que la unidad de $\overline{\wedge}$ es 0 .

Pero si consideramos $\underline{N}$, el 0 no existe para nosotros; entonces $\overline{\wedge}$ no tiene unidad en $\underline{N}$.

Máximo tiene unidad: si tenemos dos números de $\underline{N}$, uno de los cuales es 1 , siempre el otro número será máximo de los dos. Por eso, un número cualquiera n es el máximo de n y 1 .

$n \vee 1 = 1 \vee n = n$

La unidad de $\vee$ es 1 , en $\underline{N}$.

Si, en cambio, consideramos $\underline{N}_0$, es claro que la unidad de $\vee$ será 0 y no 1 . Al extender el dominio de la operación, la unidad cambió.

En cambio el mínimo, $\wedge$, no tiene unidad.

La unidad tendría que ser un número u que tuviera la propiedad:

$u \wedge n = n \wedge u = n$

para cualquier $n \in \underline{N}$.

El mínimo de u y n es el menor de los dos, y queremos que sea n , o sea que entre u y n , u sea el mayor de los dos. Pero n puede ser cualquier número; entonces u tendría que ser mayor que cualquier número, y un número así no existe.

¿Hay unidad para la resta?

Podríamos creer que es el 0 , pues siempre:

$$n - 0 = n .$$

Pero no es cierto que:

$$0 - n = n$$

para todo n .

Lo mismo pasa en la división con el 1 :

$a \,\%\, 1 = a$ pero $1 \,\%\, a \neq a$.

Podríamos decir que estas operaciones tienen unidad a la derecha pero no a la izquierda.

Podemos fácilmente construir una operación que tenga unidad a izquierda y no a derecha. Por ejemplo con la matriz:

T	a	b	c
a		c	
b	a	b	c
c			

Llenando de cualquier manera las casillas en blanco, se tiene que b es unidad a izquierda pues bTa = a , bTb = b y bTc = c . Pero no es unidad a derecha pues aTb $\neq$ a .

Es claro que esto solo puede ocurrir si la operación no es conmutativa. Si T es conmutativa y bTa = a , por supuesto también aTb = a , y toda unidad a un lado es también al otro.

Ejercicio

9)Escribir la matriz de una operación que tenga unidad a derecha pero no a izquierda.

Demos la definición de unidad de una operación :

En un conjunto A con una operación T , un elemento $u \in A$ es unidad de T si $uTa = aTu = a$ para todo a de A .

Para la composición de funciones hay unidad: es la identidad del conjunto universal: $U : I \longrightarrow I$.

En efecto, si F es una función cualquiera, $F : A \longrightarrow B$, como U deja quietos todos los puntos de A y B , es claro que:

$$UoF = FoU = F$$

pues si $c \in A$:

$$(UoF)c = U(Fc) = Fc$$

y

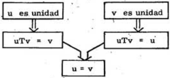
$$(FoU)c = F(Uc) = Fc \ .$$

¿Puede haber más de una unidad en una operación?

Supongamos que u y v son unidades de la operación T , definida en el conjunto A , o sea:

$uTb = bTu = b$ y $vTb = bTv = b$

para todo $b \in A$.



Inversos

Sea T la multiplicación en el conjunto de los números fraccionarios. T tiene unidad, es 1 . Si $\frac{p}{q}$ es una fracción cualquiera de este conjunto, con $p \neq 0$ hay otra $\frac{q}{p}$, que multiplicada con la primera, da la unidad: $\frac{p}{q} \times \frac{q}{p} = 1$.

Se dice, entonces, que $\frac{q}{p}$ es la inversa de $\frac{p}{q}$ en la multiplicación.

Supongamos que una operación cualquiera T , de dominio A tiene unidad u . Si para un elemento a de su dominio existe otro b, también de su dominio, tal que:

$aTb = bTa = u$,

entonces b se llama inverso o recíproco de a y para indicarlo se escribe $b = a^{-1}$.

Llamemos A a las rotaciones de centro C de un plano y T a la composición de ellas: u es la identidad (rotación de 0^o).

Cualquier rotación R tiene inversa. Si R consiste en girar m grados en un sentido, R^{-1} consiste en girar m grados en sentido contrario.

Para la suma en $\underline{N}_0$ (donde u = 0) ningún elemento a distinto de 0 tiene inversa pues no hay ningún número <u>natural</u> b tal que a + b = = 0 (b tendría que ser negativo).

Tomemos un conjunto cualquiera B , por ejemplo los habitantes actuales de este país. Pensemos en todas las posibles funciones de <u>alcance y rango iguales a B</u> : entre ellas la que a cada $x \in B$ hace corresponder su hijo mayor, si lo tiene (y si no, nada), o su mayor enemigo, o la persona que le sigue en orden alfabético, etc. Son muchas; forman un conjunto que podemos llamar E_B . En E_B está también la identidad de B , que a cada $x \in B$ hace corresponder el mismo x : Ux = x . $U \in E_B$.

En E_B sabemos efectuar la operación de componer: si G y H $\in E_B$, sabemos qué función es: GoH .

Hemos dicho también que si $G \in E_B$, entonces GoU = UoG = G, o sea que U es unidad para la composición en E_B .

Supongamos que G es una biyección, o sea existe la función inversa G' . ¿Cuánto es GoG' ? Veamos cuál es el valor de la función GoG' en un punto $c \in B$:

$$(GoG')c = G(G'c) = c$$

y también

$$(G'oG)c = G'(Gc) = c$$

pues G' deshace lo que hace G y viceversa.

Entonces G' es la inversa de G en el sentido que acabamos de definir, y podemos llamarla G^{-1} .

Para la unión de conjuntos la unidad es $\emptyset$. Si un conjunto C no es vacío no hay ningún conjunto C^{-1} tal que su unión con C sea la unidad.

Pues al unir C con cualquier conjunto, nos queda un conjunto que no puede tener menos elementos que C .

Solo $\emptyset$ tiene inverso, y $\emptyset^{-1}$ es $\emptyset$ pues $\emptyset \cup \emptyset = \emptyset$.

En general, si una operación T es idempotente (xTx = x) y asociativa, el único elemento que puede tener inverso es la unidad u , pues: si q fuera inverso de b :

$$pTq = u \Longrightarrow p = pTu = pT(pTq) = (pTp)Tq = pTq = u$$

o sea p = u .

Algunas propiedades sencillas de las inversas

Si a es la inversa de b , b es la inversa de a :

$$a = b^{-1} \Longrightarrow b = a^{-1}$$

Probar esta propiedad aplicando la definición de inversa.

Entonces, si en la igualdad $a = b^{-1}$ ponemos en vez de b, a^{-1} queda que $a = (a^{-1})^{-1}$.

El inverso del inverso de a, $(a^{-1})^{-1} = a$.

Si una operación T es asociativa, un elemento a no puede tener más de un inverso.

Pues supongamos que tiene dos: b y b'

(En el siguiente diagrama vamos transformando la primera fórmula a lo largo de las flechas. Las flechas ahora unen <u>fórmulas iguales</u>. En los restantes recuadros se explica por qué son iguales).

Si opero con a en el centro y un inverso en cada extremo:

$$\begin{tikzcd}
& \boxed{b'TaTb =} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\boxed{= b'T(aTb)} \arrow[d, "\boxed{b \text{ es inverso de } a}"'] & \boxed{\text{asociatividad}} & \boxed{= (b'Ta)Tb} \arrow[d, "\boxed{b' \text{es inverso de } a}"] \\
\boxed{= b'Tu} \arrow[d] & \boxed{u \text{ es unidad}} & \boxed{= uTb} \arrow[d] \\
\boxed{= b'} & & \boxed{= b}
\end{tikzcd}$$

O sea: los dos inversos coinciden: $b = b'$.

Si T no es asociativa puede haber elementos con más de una inversa, como se ve en la operación definida por esta matriz:

T	u	a	b
u	u	a	b
a	a	u	u
b	b	u	b

u es unidad (verificarlo).

a tiene dos inversos: b y a.

Demostrar que esta T no es <u>a</u>sociativa pero es conmutativa.

Supongamos ahora que T es una operación <u>asociativa</u> en A, con unidad u. Y que a y b son dos <u>elementos que tienen</u> inversas, a^{-1} y b^{-1}, respectivamente, o sea:

$aTa^{-1} = a^{-1}Ta = u$ y $bTb^{-1} = b^{-1}Tb = u$.

Entonces si $c = aTb$, c tiene inverso también y este inverso es $c^{-1} = b^{-1}Ta^{-1}$.

Vamos a probar que:

$$\underbrace{(aTb)}_{c} \; T \; \underbrace{(b^{-1}Ta^{-1})}_{c^{-1}} = u$$

$(aTb)T(b^{-1}Ta^{-1})$

T es asociativa

$= aT(bTb^{-1})Ta^{-1}$

b^{-1} es inverso de b

$= aTuTa^{-1}$

T es asociativa

$= (aTu)\ T\ a^{-1}$

u es unidad

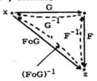
$= a\ T\ a^{-1}$

a^{-1} es inverso de a

$= u$

Análogamente resulta que $c^{-1}Tc = u$.
Entonces $c^{-1} = b^{-1}Ta^{-1}$ es el inverso de $c = aTb$.
Nótese que en el inverso de aTb se cambia el orden: $b^{-1}Ta^{-1}$ (claro que si T fuera conmutativa esto no importaría).
Así en la multiplicación de fracciones, si el inverso de $\frac{p}{q}$ es $\frac{q}{p}$ y el inverso de $\frac{r}{s}$ es $\frac{s}{r}$ (con p y r $\neq$ 0), entonces $\frac{p}{q} \times \frac{r}{s}$ tiene inverso y éste es $\frac{s}{r} \times \frac{q}{p}$ ó $\frac{q}{p} \times \frac{s}{r}$ (pues $\times$ es conmutativa).

Si F y G son biyecciones de A $\longrightarrow$ A , entonces $(FoG)^{-1} = G^{-1}oF^{-1}$
y aquí se ve la importancia del orden.



Para un punto x de A se tiene:
$F(Gx) = z$

Y para volver a x desde z hay que aplicar primero F^{-1} y luego G^{-1} , y no al revés.

Regularidad

Cuando una operación asociativa T en A tiene inversa para todo elemento de A , se cumple siempre la siguiente propiedad:

Si $aTb = aTc$ entonces $b = c$.

Se dice que si éste es el caso se puede simplificar la a .

Para probarlo comencemos operando con $a^{-1}T$ por la izquierda en los dos miembros de la hipótesis:

$$\boxed{a^{-1}T(aTb) = a^{-1}T(aTc)}$$

$$\boxed{= (a^{-1}Ta)Tb} \qquad \boxed{= (a^{-1}Ta)Tc}$$

$$\boxed{= u\,T\,b} \qquad \boxed{= u\,T\,c}$$

$$\boxed{= b} \qquad \boxed{= c}$$

entonces $b = c$.

Esta propiedad de poder simplificar se llama regularidad y puede cumplirse aunque no haya inversa. Entonces diremos:

Una operación T se llama regular si cumple:

$$pTq = pTr \implies q = r \ ,$$

para todos los puntos de su dominio.

Por ejemplo, la suma de números naturales es regular (aunque no hay inverso):

$$a + b = a + c \implies b = c$$

La potenciación también es regular en $\underline{N}$, con respecto a la base:

$$a^n = b^n \implies a = b \ .$$

Así, si dos números naturales tienen igual cubo, son iguales: si $a^3 = b^3$ entonces $a = b$. El exponente se puede simplificar. La base no siempre se puede simplificar: si $a^n = a^m$ no es obligatorio que $n = m$. Por ejemplo: $1^3 = 1^4 = 1$, pero $3 \neq 4$.

¿ Hay otros casos parecidos?

La división entera no es regular, pues, por ejemplo:

$7 \not\!/\ 6 = 1$ y $7 \not\!/\ 5 = 1$

de manera que si $a \not\!/\ b = a \not\!/\ c$ no se puede deducir de eso que $b = c$.

La multiplicación es regular en $\underline{N}$, pero no en $\underline{N}_o$, pues $0 \times a = 0 \times b$ aunque a y b sean diferentes. El cero no se puede simplificar. Cualquier otro número, sí:

$$a \times b = a \times c \implies b = c \quad , \text{ si } a \neq 0 \ .$$

Ejercicios

10) M (punto medio de un segmento) es una operación **regular** . Verificarlo.

11) Ésta es la matriz de una operación regular. ¿Por qué?

	a	b	c
a	b	c	a
b	a	b	c
c	c	a	b

12) Construir tablas de operaciones regulares y no regulares. (Si algún elemento aparece repetido en alguna fila o columna, la operación no es regular respecto de algún operando. ¿Por qué?)

13) Demostrar que $\vee$, $\wedge$, $\underline{\vee}$, $\overline{\wedge}$ no son regulares. ¿Pasa lo mismo con otras operaciones idempotentes?

Ecuaciones

Si a y b son dos números naturales, sabemos calcular el resultado de sumarlos: $a+b$. Supongamos habernos olvidado qué números eran a y b, pero recordamos que el resultado era 8 : $a+b = 8$. ¿Podemos deducir cuáles eran a y b ? No, porque hay muchas posibilidades: 1 y 7, 2 y 6, 3 y 5, etc. Pero si recuerdo uno de los dos, puedo deducir el otro: si sé que $a = 5$, o sea que $5 + b = 8$, puedo calcular b. Esto es un problema inverso de la suma.

Si quiero calcular 5×8, es un problema de multiplicación. Si sé que $5\times c = 40$, y quiero calcular c, se trata del problema inverso de la multiplicación. Se dice que $5\times c = 40$ es una ecuación y que c es la incógnita de la ecuación. El valor correcto de c, o sea el número que puesto en vez de c verifica la igualdad, se llama raíz de la ecuación.

Tomemos ahora una operación asociativa cualquiera, que llamamos T, definida en el conjunto A. La definición de T nos debe decir cómo calcular bTc para todo par de puntos b, c de A: $bTc = d$. Pero existe el problema inverso: dado b y conocido el resultado d, averiguar cuál es c.

Este problema se llama ecuación, como cuando había que hallar un punto c en el cual una función conocida F tomaba un valor dado, d : $Fx = d$, la x es la incógnita y hay que descubrir sus posibles valores.

También puede ser que conozcamos c y d y la incógnita sea b. Para no confundirnos usaremos para las incógnitas símbolos de variables:

$$pTx = q$$

significa que p y q son datos y debemos averiguar qué elemento, puesto en lugar de x, satisface la igualdad.

Lo mismo para $xTb = c$.

¿Cómo se resuelve una ecuación $bTx = d$?

Si T tiene unidad y b tiene inverso b^{-1}, la solución es fácil: $x = b^{-1}Td$, pues

$$bTx = bT\underbrace{(b^{-1}Td)}_{x} = (bTb^{-1})Td = uTd = d$$

Ésta es la única solución o raíz de la ecuación; pues si un valor a es raíz, o sea $bTa = d$, se puede demostrar que a coincide con la raíz anterior: $a = b^{-1}Td$:

$$a = uTa = (b^{-1}Tb)Ta = b^{-1}T\underbrace{(bTa)}_{d} = b^{-1}Td$$

Ejercicio

14) Hacer lo análogo cuando la incógnita es el primer operando : $xTc = d$. Verificar que la raíz es dTc^{-1} .

Si b no tiene inversa, puede haber una raíz, más de una o ninguna.

Por ejemplo, si T es $\vee$, o sea el máximo de dos números naturales (que es asociativa, conmutativa y con $u = 1$), la ecuación:

$$x \vee 5 = 8$$

tiene una única solución: $x = 8$.

La ecuación:

$$5 \vee x = 4$$

no tiene ninguna raíz.

La ecuación:

$$5 \vee x = 5$$

tiene cinco raíces: $x = 1, 2, 3, 4, 5$.

Ejercicio

15) Dar ejemplos análogos con máximo común divisor y mínimo común múltiplo.

¿Cuándo podemos estar seguros de que hay una sola solución?

Si una operación es regular y la ecuación $aTx = c$ tiene solución, la solución es única. Pues si $aTb = c$ y $aTb' = c = aTb$ resulta que $b = b'$ por la definición de regularidad.

De esto proviene el interés de la regularidad.

Nótese que decimos si tiene solución; puede no tener ninguna ; pero no puede tener más de una.

La suma en $\underline{N}_0$ es regular: las ecuaciones tienen una sola raíz o ninguna:

$$5 + x = 8$$

tiene una única raíz, $x = 3$.

$$5 + x = 4$$

no tiene raíz en $\underline{N}_0$, x deberá ser negativa.

También la multiplicación es regular en $\underline{N}_0$:

$$5 \times x = 20$$

tiene una raíz: $x = 4$.

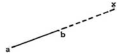
$$5 \times x = 8$$

no tiene raíz; tendría que ser fraccionaria.

M (punto medio) es también regular y la ecuación aMx = b tiene siempre una única raíz.

Dados a y b , ¿cuál es el otro extremo de un segmento de extremo a y punto medio b ? Basta prolongar otro tanto el segmento (a,b) , y lo mismo para xMa = b .

M' es regular también y siempre , como M , tiene una raíz única.



También aparece el problema de hallar ambos operandos para obtener un resultado conocido d : xTy = d . Se dice entonces que hay dos incógnitas o que la incógnita es un par ordenado.

En este caso es más fácil que haya muchas raíces. Observar lo que pasa en los ejemplos anteriores y en matrices diversas.

Grupos

Un conjunto A con una operación T tal que

1) es asociativa,
2) tiene unidad u ,
3) todo elemento de A tiene inversa,

se llama un grupo.

Las fracciones positivas, con la multiplicación, forman grupo.

Las permutaciones de un conjunto, con la composición, forman grupo.

N_0 con la suma, no es grupo. Tampoco $\vee$, $\wedge$, $\underline{\vee}$, $\overline{\wedge}$.

Los conjuntos no son grupo ni para la unión ni para la intersección, pues no hay inversa.

En un grupo todas las ecuaciones con una incógnita tienen solución única, pues por 3) y 1) son regulares:

si aTx = b la raíz es $x = a^{-1}Tb$,
si xTa = b la raíz es $x = bTa^{-1}$.

Uniformidad

Muchas veces se menciona la "propiedad uniforme" de la suma , (la multiplicación, etc.), que se enuncia:

"Sumando miembro a miembro dos igualdades se obtiene una igualdad" .

O sea que si a = b y c = d entonces a+c = b+d . Esta propiedad es para nosotros evidente para cualquier operación T : si a = b y c = d , en aTc puedo remplazar a por b y c por d , y me queda el mismo resultado.

Esto ocurre por dos motivos: hemos dicho que las operaciones son funciones y por lo tanto a cada par ordenado le asignan un solo valor o resultado, y además, igualdad significa identidad, y por lo tanto siempre está permitido remplazar una cosa por otra igual.

Todas nuestras operaciones tienen la propiedad uniforme.

Esta propiedad es mejor enunciarla así:

"La operación tiene un único resultado para cada par ordenado de elementos del dominio".

Veremos más adelante que hay "operaciones" que dan más de un resultado, como la radicación. En estos casos es mejor decir que son "operaciones multiformes".

Notas y ejercicios del capítulo VIII

* Composición de permutaciones

La composición de estas funciones es también interesante.

Una permutación transforma cada elemento de un conjunto A en otro de A ; es una función biunívoca de dominio e imagen A , o sea, es una biyección de A sobre A .

Si $A = \{a, b, c, d, e\}$, una de las permutaciones entre los elementos de A , escrita en forma abreviada, es ésta: P = (a, c, e, d). Recordemos que cada elemento del paréntesis se transforma en el siguiente:

$$a \longrightarrow c \quad , \quad c \longrightarrow e \quad , \quad e \longrightarrow d \quad ,$$

el último se transforma en el primero: $d \longrightarrow a$, y si el elemento b no se ha escrito es porque se transforma en sí mismo: $b \longrightarrow b$.

En forma de tabla:

P	
a	c
b	b
c	e
d	a
e	d

Si doy además otra permutación Q = (a, b)(c, e) , de tabla Q , como P y Q son funciones puedo componerlas, y QoP será la función que consiste en aplicar primero P y al resultado, aplicarle Q .

Q	
a	b
b	a
c	e
d	d
e	c

Llamando S a la función QoP , vemos que también es una permutación, pues calculando su tabla como hemos hecho otras veces resulta:

QoP	
a	e
b	a
c	c
d	b
e	d

O sea, en escritura abreviada:

$$S = (a, e, d, b)$$

Para calcular QoP no es necesario usar las tablas sino solo la escritura abreviada.

Así, si como antes P = (a, c, e, d) y Q = (a, b)(c, e), para construir QoP empezamos por a .

A a le aplicamos P ; da c ; y a c le aplicamos Q y da e .

$$a \xrightarrow{P} c \xrightarrow{Q} e$$

Si a se transforma en e podemos ya escribir: (a, e, ...) .

Seguimos con e :

$$e \xrightarrow{P} d \xrightarrow{Q} d \ .$$

entonces: (a, e, d, ...)
Seguimos con d :

$$d \xrightarrow{P} a \xrightarrow{Q} b$$

y

$$b \xrightarrow{P} b \xrightarrow{Q} a$$

Si b se transforma en a cerramos junto a b el paréntesis y resulta:

$$(a, e, d, b)$$

Como solo queda una letra afuera, c , no hace falta escribirla . Si queremos verificar que no nos hemos equivocado y c se transforma en c , es inmediato:

$$c \xrightarrow{P} e \xrightarrow{Q} c \ .$$

Entonces:

$$QoP = (a, e, d, b)$$

Calculemos así PoQ . El resultado es:

$$PoQ = (a, b, c, d)$$

y por lo tanto

$$PoQ \neq QoP \ .$$

La composición ya sabemos que no es conmutativa.
La composición de dos permutaciones, ¿es siempre una permutación?
Supongamos que P y Q son dos permutaciones en $\underline{N} = \{1, 2, \dots\}$ Por serlo, en la primera y en la segunda columna de sus tablas deben estar todos los números de $\underline{N}$: el dominio y la imagen de una permutación son iguales. Además, a dos números distintos de la primera columna no les puede corresponder el mismo número en la segunda; o sea, en la imagen de P o de Q no puede haber números repetidos.

Si en sus tablas ocurriera lo que vemos en ésta:
que a 2 y 3 les corresponde el mismo número, entonces no serían permutaciones.

1	5
2	4
3	4
⋮	⋮

P es permutación		Q es permutación		QoP, ¿es permutación?	
1	3	1	2	1	4
2	1	2	1	2	2
3	2	3	4	3	1
4	6	4	3	4	5
5	5	5	6	5	6
6	4	6	5	6	3
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
z	x	x	20		20?
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Para saber si QoP es también una permutación tenemos que averiguar:

1°) si todos los naturales están en la segunda columna de su tabla

2°) si todo número de esta segunda columna corresponde a un solo número de la primera.

¿Está, por ejemplo, 20 ? Y, ¿ corresponde 20 a un solo número natural?

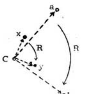
Pensemos, para contestar, cómo se obtuvo el par 1, 4 de esta tabla. En P , a 1 le corresponde 3 ; buscamos 3 en la tabla de Q; a 3 le corresponde 4. Y en QoP ponemos 1 a la izquierda y 4 a la derecha. Con el número 20, seguiremos este camino al revés. Si 20 está en la segunda columna de QoP es porque está en la segunda de Q . Pero, ¿está 20 allí? Sin duda; Q es permutación y en sus columnas están todos los números de N . Además, 20 solo le puede corresponder a un número de la primera; llamémoslo x . Busquemos x en la segunda columna de P ; por las mismas razones, está con seguridad allí y también al lado de un solo número: sea éste z .

Conclusión : 20 está en la segunda columna de QoP porque es el número que corresponde a z ; y estará al lado de z y nada más que de z .

Lo que dijimos de 20 vale para cualquier otro número. Por consiguiente QoP es también una permutación.

* Composición de funciones geométricas

Un ejemplo muy importante de composición de funciones lo tenemos en Geometría con las transformaciones rígidas del plano: traslaciones, rotaciones, reflexiones, simetrías y, en general, todos los movimientos de un plano que no lo "estiran ni arrugan", que dejan igual, invariante, las distancias entre sus puntos. Cada uno de estos movimientos o transformaciones es una función cuyo dominio y rango son el plano dado y que lleva cada punto del lugar que tenía antes al que tiene después.



Así una rotación de centro C y 90° en el sentido del reloj define una función R cuyo valor en cada punto x es el punto al cual va a parar x después de la rotación.

x se transforma en y ; a , en b :

$y = Rx$, $b = Ra$, etc.,

y

$C = RC$

pues el centro de la rotación no se mueve.

Si tomamos dos de estos movimientos y los aplicamos uno después de otro obtenemos como resultado otro movimiento. Cada movimiento es una función; por lo tanto, lo que estamos haciendo al aplicar un movimiento después de otro es aplicar una función al resultado de otra, o sea estamos componiendo las funciones.

Así si R' es, por ejemplo, una rotación alrededor del mismo punto C de 25^o en sentido contrario al reloj, componer R y R' es aplicar primero R y al resultado R', lo cual es una rotación de $90^o - 25^o = 65^o$ en el sentido del reloj.

R'oR = rotación de centro C y 65^o en el sentido del reloj.

Si T es una traslación de dos unidades a la derecha y T' la traslación de una unidad hacia abajo, la composición T'oT consiste en mover cada punto dos unidades a la derecha y luego una hacia abajo, lo que es una nueva traslación.

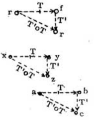


Figura B

¿Qué es RoT ? (fig. C). Es el movimiento que consiste en trasladar primero dos unidades a la derecha y luego girar alrededor de C, 90^o en el sentido del reloj.

Si se estudia con atención el resultado se verá que es una rotación de 90^o alrededor de un punto D colocado una unidad abajo y una a la izquierda de C .

Verificarlo para algunos puntos.

En cambio, si calculamos ToR o sea primero hacemos la rotación y después la traslación, se obtiene una rotación de 90^o, pero alrededor de un punto D' , colocado una unidad abajo y una a la derecha de C .

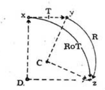


Figura C

Ejercicio

16) Verificar que el siguiente diagrama sirve para calcular el máximo común divisor de a y b .

Usamos dos variables, z para los sucesivos factores primos comunes y u para ir formando el resultado (producto de esos factores).

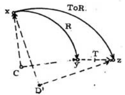
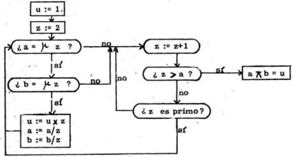


Figura D

Llamamos a al menor de los dos números. μ es la relación "múltiplo", de modo que "¿$a = \mu z$?" significa "¿es a múltiplo de z ?".



RESULTADOS DE LOS EJERCICIOS

Capítulo 1

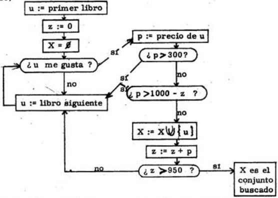
1) Ser avión implica ser vehículo.
2) Fracción implica número.
3) Planeta implica girar alrededor del Sol.
4) Equivalentes.
5) Equivalentes.
6) Terminar en 2 implica ser múltiplo de 2 .
7) Ninguna implica la otra.
8) Equivalentes.
9) Los amigos de Juan siempre lo ayudan. Por lo tanto quienes no lo ayudan no son amigos de él. Pero Pedro puede haberlo ayudado sin ser su amigo.
10) Si es tolerante no le obedecen. Si no lo es, no se sabe lo que pasará: no es forzoso que le obedezcan.
11) Pérez me ha acusado. Esa acusación la habrá hecho con placer porque me envidia. Pero que la haga con placer o de mala gana, eso no tiene nada que ver con la verdad de la acusación.
12) Tesis: C corta a B . La negamos: C no corta a B . Entonces C // B . Pero C y A tienen un punto común. Por ese punto pasan entonces dos paralelas a B , lo que es absurdo (pues hay un axioma que dice que solo puede pasar una). Entonces es falso que C no corta a B .

Capítulo 2

1 a 9) Los conjuntos, con mayúsculas cualesquiera, preferiblemente iniciales de sus nombres. Los elementos preferiblemente con la minúscula correspondiente y subíndices numéricos. Esos subíndices pueden ser: número de lista del alumno, número de patente del auto, número del puesto que ocupa cada jugador, orden en que se han contado los granos. Para personas, ríos, clases de vertebrados o nombres de equipos, es conveniente usar una o dos iniciales de cada uno.
10) {Estos cinco mazos de cartas} , {Las parejas de este baile} , {Los regimientos de este ejército} , etc.
11) Los números naturales mayores que 3 . Elementos: 4, 5, 6 ... Los naturales mayores o iguales que 2. Elementos: 2, 3, 4, ... Los naturales que multiplicados por 4 dan menos que 20. Elementos: 1, 2, 3 y 4 .
12) Elementos: todos los hermanos de Juan Pérez.
Todas las ciudades que son capitales de algún país.
13) Los objetos que son iguales a sí mismos. Elementos: todos los objetos.
Los objetos que son hijos de su padre. Elementos: todas las personas y animales con padre.
14) Los objetos que son mamíferos o árboles.
Los objetos que son mamíferos o no son mamíferos.
Los objetos que pertenecen a A . Elementos: los de A . Es A .
15) $\{x \mid x \in \underline{N} \text{ y } x : 3 < 10\}$

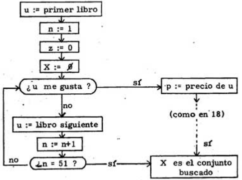
16) $\{x \mid x \in \underline{N}$ y $30 =$ múltiplo de $(4 \times x + 2)\}$

18)



Nótese que la variable X representa conjuntos, no números.

19) En el diagrama anterior, agregar una variable n para contar los libros, así:



20) Si un triángulo es equilátero, es un triángulo equiángulo y recíprocamente.

21) Hay enteros mayores que 9 que no son enteros de dos cifras, por ejemplo, los enteros de tres cifras.

22) Hay planetas más chicos que la Tierra que no son planetas sin lunas; Marte es casi la mitad de la Tierra y tiene dos satélites.

23) El octaedro es también un poliedro regular y falta en el segundo conjunto.

24) Un número es par y primo si y solo si es el número 2 .

25) Hay libros aburridos que no son de Matemática .

Capítulo 3

1) Sí somos solo dos hermanos. 2) No son disjuntos.

3)  No, siempre habrá múltiplos comunes.

4) 32 partes.

5) $2^n - 1$. 6) $2^{11} = 2048$. 7) Sí: son 63 grupos y 52 semanas.

8) n . 9) n . 10) $\frac{n \times (n-1)}{2}$

11) Igual que 10 .

12) Damos como ejemplo dos particiones del primer conjunto:
{insectos con un par de alas} , {insectos con dos pares de alas} e {insectos sin alas}
{insectos dañinos} , {insectos útiles} , {los demás insectos}

13) a) Porque dos de las clases son vacías, ya que todos los insectos tienen 6 patas.

b) Puede haber jugadores con más de una de esas cualidades, con ninguna.

c) 8 no es divisor de 12 .

d) Faltan países.

e) Hay elementos en más de una clase (Marte, Venus).

14) No, pues hay personas que no son hermanos de nadie.

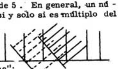
15) Sí. Dos números están en una misma clase si y solo si su diferencia es múltiplo de 12 .

Capítulo 4

1) Como 3 y 5 son primos entre sí, un número es múltiplo de $3 \times 5 = 15$ si y solo si es múltiplo de 3 y de 5 . En general, un número es múltiplo de otros dos, n y m si y solo si es múltiplo del mínimo común múltiplo de n y m .

2) {múltiplos de 12}

3) No. Ejemplo:



4) Algunas de las intersecciones "raras":

5) Sí.

6) Pueden serlo o no: lo sabrá el lector.

7) Sí: en uno los elementos son colecciones, en el otro, estampillas

8) 

9) 

10) Da un ángulo cóncavo si las rectas que limitan los semiplanos se cortan. Si son paralelas, no.

Para los ejercicios siguientes, recordar que dos conjuntos son iguales si y solo si, cada elemento del primero está en el segundo, y cada elemento del segundo está en el primero. Además recordar que $x \in A \Longrightarrow x \in A \cup B$, cualquiera sea B.

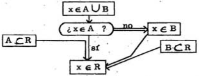
11) $x \in A \cup \emptyset \Longrightarrow x \in A$ ó $x \in \emptyset$. Como $\emptyset$ no tiene elementos, $x \in A$.
$x \in A \Longrightarrow x \in A \cup \emptyset$.

12) $x \in A \cup A \Longrightarrow x \in A$ ó $x \in A$, pero estas dos posibilidades son la misma; entonces $x \in A$.
$x \in A \Longrightarrow x \in A \cup A$

13) $x \in A \cup I \Longrightarrow x \in A$ ó $x \in I$; en ambos casos. $x \in I$,
$x \in I \Longrightarrow x \in I \cup A$.

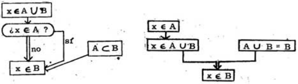
14) Estar en $A \cup B$ o estar en $B \cup A$ significa lo mismo: estar en A o en B.

15)

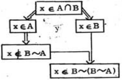


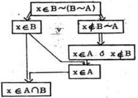
Por lo tanto $A \cup B \subset R$.
Para el otro lado: si $A \cup B \subset R$, como $A \subset A \cup B$, por transitividad $A \subset R$.

16) $x \in B \Longrightarrow x \in A \cup B$.

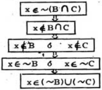


17) Demostremos directamente: $x \in B \sim (B \sim A) \Longleftrightarrow x \in A \cap B$ pues $B \supset A \Longrightarrow A \cap B = A$ y queda la primera fórmula.
(ver página siguiente).



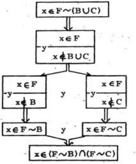


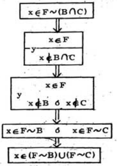
18) Pues $x \in G \sim H$ significa $x \in G$ y $x \notin H$, o sea $x \in G \cap (\sim H)$.
19) Segunda ley de De Morgan: $\sim(B \cap C) = (\sim B) \cup (\sim C)$
Se probará que $x \notin (B \cap C) \Longrightarrow x \in (\sim B) \cup (\sim C)$
La segunda parte leerla en el mismo diagrama de abajo hacia arriba.



20) Usar el mismo diagrama para las dos partes de cada demostración. El sentido de las flechas corresponde a la primera parte.

$F \sim (B \cup C) = (F \sim B) \cap (F \sim C)$ $F \sim (B \cap C) = (F \sim B) \cup (F \sim C)$





21) a) A ; b) $\emptyset$; c) $\emptyset$; d) A ; e) A ; f) $\emptyset$; g) $\emptyset$; h) A; i) A .

22) a) I , b) A , c) I , d) A , e) B , f) A , g) A , h) $\emptyset$, i) A , j) $\emptyset$, k) B .

23) $K = (B \cap C) \sim A$. $H = B \sim (A \cup C)$, $J = (A \cap C) \sim B$.
$L = C \sim (A \cup B)$. Lo que está fuera: $E \sim (A \cup B \cup C)$.

24) Trabajan 18 personas. Solo trabajan 15. Solo estudian 7 .

25) Tienen solo la tercera falla: 29 . Tienen por lo menos la tercera falla: 69 libros.

26) No contestaron ninguna pregunta 6 personas.

Capítulo 5

1) Para definir bien estas relaciones falta solo decir en qué conjuntos se eligen los primeros y los segundos sujetos de la relación. Por ejemplo: a) personas - personas ; b) ríos - mares ; c) personas - animales ; d) $\underline{N}$ - $\underline{N}$; e) rectas - rectas o planos ; f) personas - materia ; g) aviones - aviones ; h) triángulos - triángulos.

2) a)

"posee importantes minerales de"

Estados Unidos	hierro, petróleo, aluminio
Canadá	níquel, aluminio
México	plata, petróleo

b)

"es capital de"

Guatemala	Guatemala
San Salvador	El Salvador
Tegucigalpa	Honduras
Managua	Nicaragua
San José	Costa Rica
Panamá	Panamá

c) "para ir al colegio toma"

Antonio	ómnibus, subte
Alicia	colectivo
Miguel	subte, colectivo
Susana	colectivo, ómnibus
Juan	subte, colectivo

d)

S

1	2
2	3
3	4
4	5
5	6

Alcance : $\{1, 2, \ldots, 5\}$

e) "múltiplo de"

1	1,
2	1, 2
3	1, 3
4	1, 2, 4
5	1, 5
6	1, 2, 3, 6
7	1, 7
8	1, 2, 4, 8
9	1, 3, 9
10	1, 2, 5, 10
11	1, 11
12	1, 2, 3, 4, 6, 12

Alcance = $\{1, 2, \ldots, 12\}$

f)

$A \times B$

a	f, b
b	f, b
c	f, b

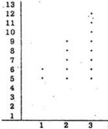
$A = \{a, b, c\}$
$B = \{f, b\}$

3) $\text{Im}(1) = \{1, 2, 3, \ldots, 99\}$; $\text{Im}(2) = \{1, 2, 3, \ldots, 49\}$; $\text{Im}(3) = \{1, 2, 3, \ldots, 33\}$; $\text{Im}(33) = \{1, 2, 3\}$; $\text{Im}(49) = \{1, 2\}$; $\text{Im}(99) = \{1\}$.

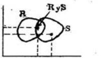
4) $\mathfrak{D}(E) = \{0, 1, 2, 3\}$; $\text{Im}(0) = \{7\}$; $\text{Im}(1) = \{5\}$; $\text{Im}(2) = \{3\}$; $\text{Im}(3) = \{1\}$

5) aDb $\Longleftrightarrow$ $3a > b-4$

a	b
1	5, 6
2	5, 6, 7, 8, 9
3	5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12



6) Sean R y S dos relaciones, representadas cada una por la figura del mismo nombre; los únicos pares que satisfacen la relación (RyS) son las coordenadas de los puntos que están a la vez en las dos figuras R y S ; o sea las coordenadas de los puntos de $R \cap S$ (figura).



7) Si y solo si aRb ó aSb , a(RóS)b . Si R y S están representadas cada una por la figura del mismo nombre, los únicos puntos que satisfacen la relación R ó S son las coordenadas de los puntos de la figura R o las de los puntos de la S ; es decir, las coordenadas de $R \cup S$. Por lo tanto la figura $R \cup S$ es la representación gráfica de la relación R o S.

8) Si R es el gráfico de la relación R , los pares que satisfacen $\not R$ son las coordenadas de los puntos que no están en la figura R . Por lo tanto la figura $\sim$R es el gráfico de la relación $\not R$.

9) a $<^{-1}$ b si y solo si $b < a$. Pero también $a > b$ si y solo si $b < a$. Los mismos pares que satisfacen $<^{-1}$ satisfacen $>$: las dos relaciones coinciden.

10) De $\leqslant$ es $\geqslant$. De $\subset$ es $\supset$.

11) Alcance y rango = $\underline{N}$. $\mathfrak{D}(S^{-1}) = \{2, 3, 4, \ldots\}$; $\text{Im}(S^{-1}) = \underline{N}$.

12) Restricción .

Capítulo 6

1) Si y solo si $R = R^{-1}$, entonces aRb $\Longleftrightarrow$ $aR^{-1}b$. Pero $aR^{-1}b \Longleftrightarrow$ bRa . Entonces aRb $\Longleftrightarrow$ bRa .

2) Si el punto de coordenadas (p, q) pertenece a la representa -

ción gráfica de una relación simétrica, también pertenece a esta representación el punto de coordenadas (q, p) . Se demostrará que estos pares de puntos son simétricos respecto de B . Si $p = q$ el punto (p, q) está sobre la bisectriz y su simétrico respecto de ella es el mismo punto. Si $p \neq q$:

R bisectriz del ángulo XY

Supongamos que los puntos a , de coordenadas $(2, 5)$ y b $(5, 2)$ pertenecen a la representación gráfica . Estos dos, y los puntos c de coordenadas $(2, 2)$ y d $(5, 5)$ son vértices de un rombo. a y b son simétricos respecto de la diagonal cd . Pero c y d están en B . Por lo tanto a y b son simétricos respecto de la bisectriz.

3) $p(SyS^{-1})q$ y $q(SyS^{-1})p$ significan lo mismo: pSq y qSp . $p(SóS^{-1})q$ y $q(SóS^{-1})p$ significan lo mismo: pSq ó qSp .

4) Alcance y rango: todas las relaciones. Dominio e imagen : todas las relaciones. (Recordar que toda relación es extensión de sí misma.) Por esta última razón la extensión es reflexiva. También es transitiva: si S es extensión de R : $aRb \Longrightarrow aSb$ (ésta es la definición de extensión); pero si además T es extensión de S : $aSb \Longrightarrow aTb$. Por lo tanto $aRb \Longrightarrow aTb$: T resulta ser extensión de R .

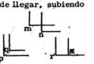
5)

Simétrica	
a	b, a, c
b	c, d, a
c	a, b
d	b

Transitiva	
a	b, a, c, d,
b	c, d, a, b
c	a, b, d, c
d	b, a, c, d

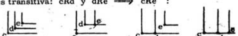
Órdenes

1) el primero: 2 - el último, 6 .
2) primero: 3 - último, 6 .
3) No hay primero: ninguno es divisor de los otros- último: 6 .
4) Primero es el que tiene todos 10 , último el que tiene todos 0 .
5) De $\leqslant$, $\geqslant$. De $\subset$, $\supset$. De múltiplo, divisor.
6) Mostraremos : 1º) que algunos puntos no están en la relación R . Por ejemplo, no se puede llegar de d a b ni de b a d subiendo por el árbol. Si R es un orden, no es orden total. 2º) R es antisimétrica y transitiva: es un orden estricto. Antisimétrica: si dRe entonces e$\not R$d ; si se llega de d a e subiendo por el árbol, se llega de e a d bajando. R es transitiva. Si se llega subiendo de c a d y de d a e , se puede llegar, subiendo por el árbol, de c a e .
7) Hay puntos de esta página como m y n que no están en la relación S . Ni mSn ni nSm . S es antisimétrica: pSq y rSs ; pero p no es interior o está en los bordes del ángulo de vértice q : q$\not S$p ; y por la misma



razón s$\not R$r.

S es transitiva: cRd y dRe $\Longrightarrow$ cRe :



8) Se ha demostrado que la extensión es transitiva y reflexiva. Además, si dos relaciones R y S son distintas y S es extensión de R , R no es extensión de S . Es antisimétrica. Por las tres propiedades: transitiva, reflexiva, antisimétrica, la extensión es un orden no estricto. Además, si $R \neq S$ puede ocurrir que ninguna de las dos relaciones sea extensión de la otra: la extensión es un orden parcial.

Equivalencias

1) a), b) y c) no son transitivas. d) no es simétrica ni transitiva.

2) Aplicar sucesivas veces la propiedad transitiva. Primero : a_1Ea_3 ; segundo: a_1Ea_4 , etc.

3)

R	
a	a, b, c, x
b	a, b, c, x
c	a, b, c, x
d	d, h, k, m
h	d, h, k, m
k	d, h, k, m
m	d, h, k, m
x	a, b, c, x

T	
a	a, b, c, d, n, p, q, r
b	a, b, c, d, n, p, q, r
s	s, m
y	y
c	a, b, c, d, n, p, q, r
d	a, b, c, d, n, p, q, r
m	m, s
n	a, b, c, d, n, p, q, r
p	a, b, c, d, n, p, q, r,
q	a, b, c, d, n, p, q, r
r	a, b, c, d, n, p, q, r

4) Los paralelos y cada polo. No se pueden clasificar por la longitud pues los polos estarían en más de una clase (en todas).

5)

R	
d	d
a	a, b, c
b	b, a, c
c	c, a, b
e	e, f, p, q,
f	f, e, p, q
p	p, e, f, q
q	q, e, f, p

Para verificar que ésta y las de las otras particiones son tablas de equivalencias, verificar que son tablas de relaciones idénticas, simétricas y transitivas.

6) Primero, demostrar que A_a y A_b son iguales o disjuntos. Si a es equivalente a b todo elemento de A_a está en A_b y viceversa.

Pues si a es equivalente a b , b es equivalente a a . $b \in A_a$ y si a es equivalente a b , todo elemento equivalente a b es equivalente a a . Del mismo modo se demuestra que todo elemento de A_a está en A_b . Entonces, A_a y A_b coinciden.

Si a no es equivalente a b , A_a y A_b son disjuntos. Supongamos que un elemento, por ejemplo d , es común a los dos. Si $d \in A_a$, a es equivalente a d y por pertenecer a A_b , d es equivalente a b ; por carácter transitivo a y b son equivalentes, en contra de lo supuesto.

Segundo, se formaron conjuntos con cada elemento del dominio; y nos quedamos con todos los A_x distintos; por lo tanto todo elemento de D , está en uno de esos conjuntos. Si, además, estos son disjuntos cada elemento solo puede estar en un conjunto.

Tercero, para probar que R = E : probar que los pares de elementos que satisfacen las dos relaciones son los mismos.

O sea: $a \, R \, b \Longleftrightarrow a \, E \, b$, que es evidente.

7)

	E
a	a, c, f, h
b	b, d, g
c	c, a, f, h
d	d, b, g
e	e
f	f, a, c, h
g	g, b, d
h	h, a, c, f

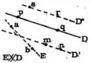
E hace una partición en A por "años". Cada persona está en una clase y una sola.
Clases:

$\{a, c, f, h\}$
$\{b, d, g\}$
$\{e\}$

8) Es idéntica y simétrica, evidentemente. Es transitiva: si a y b tienen, por ejemplo, resto 3 , y b y c , resto 3 , a y c tienen el mismo resto.

Clases de la partición por C' en D = $\{1, 2, \ldots, 30\}$
$\{5, 10, 15, 20, 25, 30\}$, $\{1, 16, 11, 16, 21, 26\}$, $\{2, 7, 12, 17, 22, 27\}$, $\{3, 8, 13, 18, 23, 28\}$, $\{4, 9, 14, 19, 24, 29\}$.

9) Las clases son la recta D y cada una de las rectas del plano paralela a D. Ésta es una partición del plano pues todo punto del plano está en una de estas rectas y en una sola. Y es una partición según la relación D pues si y solo si dos puntos están en la relación D pertenecen a la misma clase.



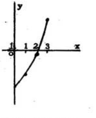
D'// D
D''// D E ∦ D

Clases: D'' D' D etc.
sDr , mDn , pDq , a$\not D$b , etc.

Capítulo 7

1) Ninguna .
2) $y = 3x^2 + 2x - 17$.

x	y
0	-17
1	-12
2	-1
3	16



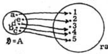
3) Se ve en seguida que hay puntos del dominio para los cuales las tres funciones toman distintos valores.

4) Pues si F es biunívoca cada punto de la imagen corresponde a un solo punto del dominio. Por consiguiente al dar vuelta la tabla de F queda la tabla de una función.

5) La identidad en un conjunto: único caso.

6) Dominio = A , rango = $\underline{N}$ = $\{1, 2, \ldots\}$

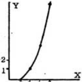
F	
a	1
e	2
d	3
b	4
c	5



rango = $\underline{N}$

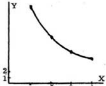
7) a) $y = x^2 + 1 - 2x$

x	y
1	0
2	1
3	4
4	9



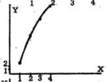
b) $y = x^2 + 20 - 8x$

x	y
1	13
2	8
3	5
4	4



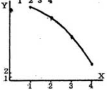
c) $y = 10x - x^2 - 6$

x	y
1	3
2	10
3	15
4	18



d) $y = 20 - x^2$

x	y
1	19
2	16
3	11
4	4

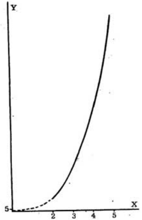


8) Volumen esfera = $\frac{4}{3} \times \pi \times r^3$

2	33
4	267
5	523

9)

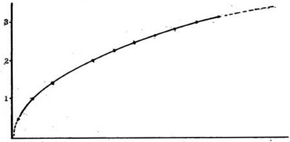
vertical: 1mm = 5



Para x = 3 , v = 21 mm ; 21 X 5 = 105 . El gráfico da volumen : 105 .

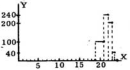
Por la fórmula: volumen = $\frac{4}{3} \times 3{,}14 \times 3^3 = 113$

10)



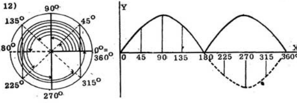
11)

de 0 h a 19 h	0 w
de 19 h a 21 h	100 w
de 21 h a 22 h	240 w
de 22 h a 23 h	200 w
de 23 h a 23 $\frac{1}{2}$ h	40 w
de 23$\frac{1}{2}$h a 24 h	0 w



Se ha considerado que de 0 h a 19 h , no comprende 0 h y sí 19 h . Lo mismo en los demás intervalos de tiempo. El gráfico está formado por 6 partes: 2 sobre el eje de las x y 4 paralelas a este eje.

12)



13) Ej. 6: $x = b$. Ej. 7: a) $x = 3$, b) $x = 4$, c) x es un poco mayor que 1 (por el gráfico), d) $x = 4$. Ej. 10: $x = 16$. Ej. 9 : x es un poco mayor que 2 (gráficamente). Ej. 11 : $Fx = 240$ para x entre 21 y 22 $Fx = 230$ no tiene raíz.

14) Todas menos la función del ejercicio 11 .

15) Tantas planillas diferentes como funciones de dominio formado por tres elementos y rango por cinco: $5^3 = 125$. Planillas que no tienen aplazos: $3^3 = 27$. Planillas con algún aplazo: $125 - 27 = 98$.

16) Hay que demostrar que si F es una biyección, tiene inversa. Se define F' como relación inversa de F y se prueba que es función inversa por que:

1°) $xFy \Longleftrightarrow yF'x$, por ser relación inversa.

2°) cualquiera sea $y \in B$, existe $x \in A$, tal que $Fx = y$ pues siendo F una biyección $Im(F) = B$; $\therefore$ cualquiera sea $y \in B$ existe $x \in A$, tal que $x = F'y$, o sea $\mathcal{D}(F') = B$ y rango de $F' = A$

3°) F' es función porque siendo F biunívoca, dado y existe un único x tal que $Fx = y$, o sea, existe un único x tal que $x = F'y$.

17) Tabla de la permutación definida en $A = \{c, e, r, g\}$:

c	e
e	r
r	g
g	c

18) Diagrama de flujo de la función sucesor en numeración binaria:

S 1011 = 1100 ; S 111 = 1000 ; S 1 = 10 .

Primeros 20 números binarios: 0, 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, 1001, 1010, 1011, 1100, 1101, 1110, 1111, 10000, 10001, 10010, 10011.

Binarios	10	100	1000	10000	1011	1011
Decimales	2	4	8	16	10	11

Capítulo 8

1)

	1	2	3	4	...
1	1	1	1	1	...
2	1	2	2	2	...
3	1	2	3	3	...
4	1	2	3	4	...
.	.	.	.	.	

2) Tomar los factores primos comunes y no comunes con el mayor exponente.

3) Máximo, mínimo, $\underline{\vee}$, $\overline{\wedge}$.

4) (PoQ)a = P(Qa)

5) (VoZ)a = V(Za) ; (PoQ)b = P(Qb) ; (MoX)v = M(Xv).

6) Para probarlo basta poner un contraejemplo:
$(24 : 4) : 2 \neq 24 : (4 : 2)$ pues $3 \neq 12$.

7) $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$. En los dos casos el resultado es el menor de los tres números.

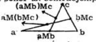
$(a \overline{\wedge} b) \overline{\wedge} c = a \overline{\wedge} (b \overline{\wedge} c)$. Tomar factores primos comunes con el menor exponente primero de a y b y segundo de este resultado y c ; o primero de b y c y segundo de a y $b \overline{\wedge} c$, es tomar los comunes a los tres números con su menor exponente.

$(a \underline{\vee} b) \underline{\vee} c = a \underline{\vee} (b \underline{\vee} c)$. En cualquiera de los dos casos el resultado es el producto de los factores primos comunes o no comunes a los tres números a, b, c tomados con el mayor exponente .

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$. Estar en A o en B , o en C, es lo mismo que estar en A , o en B o en C : es estar en alguno de los tres conjuntos.

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$. Estar en el conjunto del primero o del segundo miembro es lo mismo: es estar a la vez en los tres conjuntos A , B y C .

8) Basta poner un contraejemplo:



aM(bMc) $\neq$ (aMb)Mc

9)

	a	b	c
a	c	a	b
b	a	b	a
c	c	c	b

b es unidad a la derecha y no a la izquierda.

10) El único segmento que tiene como uno de sus extremos c y punto medio p es el segmento cd : c p d

cMd = cMc = p $\Longrightarrow$ d = e .

11) No hay dos resultados iguales en ninguna fila ni columna (es regular respecto de los dos operandos).

12) Regulares:

	a	b	c	d
a	a	c	b	d
b	c	b	d	a
c	b	d	a	c
d	d	a	c	b

No regulares:

	a	b	c	d
a	a	c	b	d
b	c	b	d	a
c	b	d	a	c
d	d	b	c	b

13) Basta poner contraejemplos:

$10 \vee 4 = 10$, $10 \vee 5 = 10$ y $4 \nmid 5$.
$3 \wedge 6 = 3$, $3 \wedge 9 = 3$ y $6 \nmid 9$.
$8 \overline{\wedge} 4 = 4$, $8 \overline{\wedge} 12 = 4$ y $4 \nmid 12$.
$8 \underline{\vee} 10 = 40$, $40 \underline{\vee} 10 = 40$ y $8 \nmid 40$.

14) xTc = d . Verificar que dTc^{-1} es raíz; remplazando a x por dTc^{-1} : $(dTc^{-1})Tc = dT(c^{-1}Tc) = dTu = d$.

15) $x \underline{\vee} 6 = 12$ - raíces: 4 , 12 .
$a \underline{\vee} 15 = 120$ - raíces: 8 , 40 , 24 , 120 .
$a \underline{\vee} 5 = 5$ - raíces: 5 , 1 .
$a \underline{\vee} 10 = 3$ - no tiene raíz .
$a \overline{\wedge} 9 = 2$ - no tiene raíz .
$10 \overline{\wedge} a = 10$ - raíces: a = 10 , 20 , 30 , etc. Cualquier múltiplo de 10 es raíz.
$12 \overline{\wedge} a = 4$ - a = cualquier número que sea múltiplo de 4 y no sea múltiplo de los divisores de 12 mayores que 4 , o sea de 6 y 12 .

16) Por ejemplo, calculemos $24 \overline{\wedge} 36$.

Empecemos con z = 2 ; 24 y 36 son múltiplos de 2 . Salimos por sí y ponemos $u = 1 \times 2$ y remplazamos 24 por 24/2 = 12 , y 36 por 36/2 = 18 . Volvemos a "¿a = kz ?" y salimos otra vez por sí, pues 12 y 18 son múltiplos de 2 .

Ponemos $u = 2 \times 2 = 4$. a = 12/2 = 6 , b = 18/2 = 9 . Volvemos a "¿$a = \mu z$?" . Sí; pero "¿$b = \mu z$?". Ahora no, pues 9 no es múltiplo de 2 . Ponemos $z = 2+1 = 3$. 3 no es mayor que $a = 6$ y es primo. Volvemos pues a "¿$a = \mu z$?" con $z = 3$. 6 y 9 son múltiplos de 3 ; entonces salimos por sí y debemos poner $u = 4 \times 3 = 12$, $a = 6/3 = 2$. , $b = 9/3 = 3$.

Volvemos a "¿$a = \mu z$?" , pero 2 no es múltiplo de 3 (sigue $z = 3$)/. Vemos pues $z = 3+1 = 4$. Ahora $z > a$ pues $z = 4$ y $a = 2$. Salimos por sí y el resultado es u o sea $= 12$.

El diagrama para mínimo común múltiplo es más complicado.

EJERCICIOS DE CONTAR, O ARTE COMBINATORIO

Ya hemos visto algunos casos interesantes de cómo se calcula el número de elementos de un conjunto.

Repetimos esos resultados como teoremas.

Toerema 1: Si un conjunto A tiene n elementos, tiene 2^n partes diferentes (incluyendo $\emptyset$ y A).

Calculado en el capítulo III (pág. 44).

Teorema 2: Si A tiene n elementos y B tiene r elementos, el número de funciones de dominio A y rango B es r^n

Calculado en el capítulo VII (pag. 126).

Teorema 3: Si el número de puntos de A es n, se lo puede ordenar totalmente de $n!$ maneras diferentes.

Calculado en el capítulo VI (pág. 99). - Recordemos que $n! = n.(n-1).(n-2)\ldots 2.1$, y $0! = 1$.

Veamos ahora algunas otras enumeraciones interesantes, casi todas calculadas hace ya dos siglos. Podemos nombrar a E u l e r como el matemático que más se destacó en esta difícil tarea.

Productos cartesianos

Hemos contado también el número de puntos de un producto cartesiano de dos conjuntos A y B (capítulo V, pág. 71).

Recordemos que la relación binaria "producto cartesiano", de dominio A e imagen B era el conjunto de todos los pares ordenados posibles (a, b), en que el primer elemento del par está en A y el segundo en B . Se simboliza $A \times B$

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A , b \in B\}.$$

Si A tiene m elementos y B tiene r , entonces $A \times B$ tiene $m.r$, pues, con cada uno de los r elementos de B podemos formar m pares diferentes.

Podemos definir análogamente el producto cartesiano de un número cualquiera n (natural) de conjuntos. Si A es un conjunto de cuchillos, B de tenedores y C de cucharas, el producto $A \times B \times C$ es un conjunto cuyos elementos son triples ordenados (a, b, c) , donde a es un cuchillo, b un tenedor y c una cuchara.

Un conjunto de n objetos ordenados totalmente se llama una n-upla, o nupla (cuádruple o cuádrupla si son 4, quíntupla si son 5 etc.).

Definición El producto cartesiano de los conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ en ese orden, es el conjunto cuyos elementos son todas las n-uplas formadas por un punto de A_1, uno de $A_2 \ldots$ y uno de A_n , en ese orden.

Se lo simboliza $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$.

$$A_1 \times A_2 \times A_3 = \{(a_1, a_2, a_3) \mid a_1 \in A_1,\ a_2 \in A_2,\ a_3 \in A_3\},$$

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_i \in A_i,\ i = 1, \ldots, n\}.$$

¿ Cuántos elementos tiene $A_1 \times \ldots \times A_n$, si cada A_i tiene cardinalidad r_i?

Para $n = 3$ es fácil .¿ Cuántos triples (a_1, a_2, a_3) hay, si A_1 tiene r_1 puntos, A_2 tiene r_2 y A_3 tiene r_3 ?

Con cada elemento de A_3 podemos formar tantos triples diferentes como pares diferentes pueden formarse con A_1 y A_2 , o sea $r_1 \cdot r_2$. Entonces $A_1 \times A_2 \times A_3$ tiene $r_1 \cdot r_2 \cdot r_3$ elementos.

Al agregar un conjunto más, el número de elementos del producto cartesiano queda multiplicado por la cardinalidad de este conjunto. Entonces: .

Teorema 4: Si r_i es el número de elementos de A_i , el producto cartesiano $A_1 \times \ldots \times A_n$ tiene $r_1 \cdot r_2 \ldots r_n$ elementos.

Por ejemplo, si hay 4 hombres, 6 mujeres y 3 niños cuántas familias diferentes, formadas por un matrimonio con un hijo podrían ser posibles con ellos?

Cada familia es un triple (padre, madre, hijo), o sea un punto del producto cartesiano $\{\text{hombres}\} \times \{\text{mujeres}\} \times \{\text{niños}\}$ y por lo tanto hay $4 \times 6 \times 3 = 72$ posibilidades.

Cuando todos los conjuntos son iguales (son "copias" de un mismo conjunto B de r elementos), tenemos $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = B$, con r puntos cada uno. Entonces $\underbrace{B \times B \times \ldots \times B}_{n \text{ veces}}$ tiene $\underbrace{r \cdot r \cdot \ldots \cdot r}_{n \text{ veces}} = r^n$ elementos.

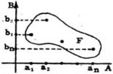
r^n era también el número de funciones diferentes de un dominio de n elementos a un rango de r puntos (Teorema 2).

¿ Es casualidad? No, porque podemos pensar que cada n-upla es una función cuyo dominio es el conjunto de los índices $\{1, 2, \ldots, n\}$ y cuyo rango es B . En efecto, es lo mismo dar el cuádruple ordenado (h, t, c, b) o la tabla adjunta, que es una función (el número de la primera columna indica la posición en el cuádruple).

1	h
2	t
3	c
4	b

Al revés, cualquier función $f : A \longrightarrow B$, cuyo dominio tenga n puntos, se puede pensar como si fuera un elemento del producto $\underbrace{B \times \ldots \times B}_{n \text{ veces}}$, que abreviaremos B^n.

Basta para eso ordenar de cualquier manera los puntos de A, llamándolos $a_1, \ldots, a_n$, y entonces a cada función $F : A \longrightarrow B$ le hacemos corresponder la n-upla $(b_1, \ldots, b_n)$ donde $b_i = F a_i$ es el valor de F en el punto a_i.



Dejamos como fácil ejercicio verificar que esta correspondencia entre funciones y n-uplas es una biyección.

¿ Cuántas de estas funciones son biunívocas? Para ser biunívoca no puede tomar dos veces el mismo valor. Eso es lo mismo que decir que en la n-upla correspondiente (o en la segunda columna de su tabla) ningún elemento se repite. Es necesario entonces que $n \leq r$, pues si el dominio tiene más puntos que el rango alguno de éstos tendrá que repetirse.

¿ Por ejemplo, cuántos números menores que 10.000 tienen sus cuatro cifras diferentes? (los que tengan menos de 4 cifras se completan con ceros a la izquierda: 45 = 0045). O sea, cuántas funciones biunívocas hay de $A = \{1, 2, 3, 4\}$ en $B = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$? La primera cifra puede ser cualquiera de los 10 dígitos $0, \ldots, 9$. La segunda, cualquiera de los 9 restantes, para no repetir; o sea 10×9 posibilidades para las dos primeras cifras. La tercera tiene 8 valores posibles pues 2 ya se han usado, y la cuarta 7. En total $10 \times (10-1) \times (10-2) \times (10-3) = 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$; algo más de la mitad (el total de funciones es 10.000 : desde 0000 hasta 9999).

En general, para contarlas, pensemos que el primer elemento de la n-upla puede ser cualquiera de los r elementos del rango B. El segundo no puede coincidir con el primero, pero puede ser cualquiera de los $r-1$ restantes. El tercero es cualquiera de los $r-2$ diferentes de los dos primeros y así sucesivamente: el i-ésimo es cualquiera de los que quedan descontando los $i-1$ ya usados, o sea $r-(i-1) = r-i+1$.

Son pues n-uplas de un producto cartesiano de n conjuntos; el primero de r puntos, el segundo de $r-1$ etc., y el último de $r-n+1$ (resultado de descontar a r los $n-1$ puntos ya usados).

Por lo tanto:

<u>Teorema 5:</u> El número de funciones biunívocas con dominio de n elementos y rango de r es $r.(r-1).r-2)\ldots(r-n+1)$; n factores con $1 \leq n \leq r$.

Atención con las fórmulas como ésta. Si $n = 2$, el último término es $r-2+1 = r-1$, y por lo tanto no hay $r-2$; la fórmula es $r.(r-1)$. y si $n = 1$, el último término es $r-1+1 = r$, o sea es también el primero, y todos los demás no existen. Aunque hemos escrito los factores $r-1$, $r-2$ es solo para facilitar la comprensión de la fórmula, que siempre es el producto de n factores, empezando por r y disminuyendo de a 1 unidad.

¿ Cuántas biyecciones hay de A con B?

Una biyección es una función biunívoca, cuya imagen es igual al rango. Si el dominio A tiene n puntos, por ser biunívoca la imagen también tiene n , y por lo tanto el rango B también Estamos en el caso anterior pero con $r = n$.

El número de biyecciones es pues $r.(r-1).(r-2)\ldots(r-r+1) = r.(r-1).(r-2)\ldots 1 = r!$

<u>Variaciones y permutaciones</u>

Tengo un conjunto de 5 elementos, elijo 3 de ellos en un cierto orden. ¿ De cuántas maneras diferentes puedo hacer eso? Dos maneras son diferentes si se toman distintos objetos, o los mismos pero en distinto orden. Se las llama las <u>variaciones</u> de 5 objetos tomados de a 3.

Así, si los 5 objetos se llaman a, b, c, de, algunas variaciones de a 3 serían (a, b, c) , (b, a, c) , a, b, d) etc.; pero no (a, a, b) ni otras con repeticiones, pues al decir "elijo 3" quiero decir 3 diferentes.

Son pues triples ordenados, o sea funciones de dominio $\{1,2,3\}$ y rango $\{a,b,c,d,e\}$ Como no se admiten repeticiones, son funciones biunívocas. Entonces, por el teorema 5, el número de variaciones de 5 objetos tomados de a 3, que simbolizaremos $V(5,3)$ es $V(5,3) = 5 \times (5-1) \times (5-2) = 60$.

Lo mismo vale en general:

<u>Teorema 6:</u> El número $V(r,n)$ de variaciones de r objetos tomados de a n (sin repetición), es igual al número de funciones biunívocas con dominio de n puntos y rango de r , o sea:

$$V(r,n) = r.(r-1)\ldots(r-n+1) \quad , \quad \text{con} \quad 1 \leq r \leq n$$

Tabla de variaciones de r objetos tomados de a n $V(r,n)$ está en la casilla de la fila r y la columna n.

Como r no puede ser mayor que n , la mitad por encima de la diagonal está vacía.

r\n	1	2	3	4	5	6	7
1	1						
2	2	2					
3	3	6	6				
4	4	12	24	24			
5	5	20	60	120	120		
6	6	30	120	360	720	720	
7	7	42	210	840	2520	5040	5040

¿Por qué son siempre iguales los dos últimos números de cada fila?

Cuando $r = n$ tenemos las variaciones de r objetos tomados de a r, es decir todos. Dos variaciones de éstas se diferencian sólo en el orden en que se toman los objetos. Por lo tanto $V(r, r)$ es el número de maneras posibles de ordenar (totalmente) los n objetos. No es pues casualidad que $V(r, r) = r!$, como en el Teorema 3.

A $V(r, r)$ se lo llama el número de permutaciones de r objetos, y se lo simboliza $P(r)$ - $P(r) = V(r, r) = r!$

Nosotros ya habíamos definido a las permutaciones (capítulo VIII, pag. 160) como biyecciones de un conjunto consigo mismo. Pero si ordenamos el conjunto de una manera cualquiera y luego aplicamos una biyección, obtenemos otra ordenación. Todas las ordenaciones se pueden obtener con estas biyecciones, y de manera biunívoca (biyecciones distintas dan ordenaciones distintas). Está bien entonces usar la palabra "permutación" en ambos casos, y no es casualidad que ambos sean de cardinalidad $r!$

¿De cuántas maneras puedo ordenar 7 libros diferentes en un estante? De $P(7)$ maneras, o sea de 5040 maneras.

Una fórmula útil: si multiplico $r.(r-1)\ldots(r-n+1)$ por $(r-n)!$ obtengo $r!$, pues $(r-n)!$ tiene justo los factores que faltan para llegar hasta 1 desde r. Entonces

$$V(r, n) = V(r, n) \,.\, (r-n)! \,/\, (r-n)! = \frac{r!}{(r-n)!} = \frac{P(r)}{P(r-r)}$$

o lo que es igual: $P(r) = V(r, n) \,.\, P(r-n)$. ¿Qué explicación tiene esta fórmula en términos de ordenaciones?

Combinaciones

Tengo un conjunto de 5 elementos y elijo 3 de ellos (diferentes) sin preocuparme por el orden. ¿De cuántas maneras puedo hacer eso? Ellas se llamarán las combinaciones de 5 objetos tomados de a 3, y su número se simbolizará $C(5, 3)$

El problema se parece al de las variaciones, pero ahora no interesa el orden en que se toman los objetos. Así abc y acb son variaciones diferentes, pero son la misma combinación.

Si supiera cuánto es $C(5, 3)$, podría calcular fácilmente las variaciones $V(5, 3)$; a cada combinación la escribo en todos los órdenes posibles y ya está. Cada combinación tiene 3 objetos; por lo tanto se la puede ordenar de $P(3) = 3!$ maneras. Hay $C(5, 3)$ combinaciones distintas. Entonces

$$V(5, 3) = P(3) \,.\, C(5, 3)$$

Como conozco $V(5, 3)$ y $P(3)$, puedo calcular $C(5, 3)$

$$C(5,3) = \frac{V(5,3)}{P(3)} = \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2} = 10$$

Este razonamiento puede repetirse siempre:

Teorema 7· El número $C(r,n)$ de combinaciones de r objetos tomados de a n (sin repetir) es igual a $V(n,m) / P(n)$, o sea:

$$C(r,n) = \frac{r.(r-1)\ldots(r-n+1)}{n!}, \quad \text{si } 1 \leq n \leq r$$

y aplicando la fórmula $V(r,n) = \dfrac{P(r)}{P(r-n)}$ también se puede escribir

$$C(r,n) = \frac{P(r)}{P(r-n).P(n)} = \frac{r!}{(r-n)!\,n!}$$

que a veces es más comoda.

$C(r,0)$ no significa nada hasta ahora. Veremos que conviene definir $C(r,0) = 1$, para cualquier $r \geqslant 0$. Vale entonces la misma fórmula:

$$C(r,0) = \frac{r!}{(r-0)!\,0!} = \frac{r!}{r!} = 1, \quad \text{pues } 0! = 1$$

Ejemplo "Aquí tienes 20 juguetes, puedes elegir 3" le dijeron a un niño. ¿ Le conviene comparar todas las posibilidades?

Elegir 3 entre 20 puede hacerse de $C(20,3)$ maneras diferentes.

$$C(20,3) = \frac{20 \times 29 \times 18}{3 \times 2} = 1140$$

. No le conviene porque antes de terminar se marearía.

Tabla de $C(r,n)$

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
7	1	7	21	35	35	21	7	1

Verificar las cantidades y agregar la fila y columna del 8.
¿Por qué está vacía por encima de la diagonal?

¿Cuántas partes de 3 elementos tiene un conjunto de 7 elementos? Se trata de ver de cuántas maneras diferentes puedo señalar 3 de esos 7 elementos. Como no importa en qué orden los señale, ese número es

$$C(7,3) = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2} = 35 \ .$$

Este razonamiento vale en general.

Teorema 8: En un conjunto de r elementos hay $C(r,n)$ partes de n elementos. $0 \leq n \leq r$.

Corolario 1: $C(r,0) + C(r,1) + \ldots + C(r,r) = 2^r$.

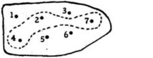
pues 2^r es el número total de partes, sean de $0, 1, 2, \ldots$ hasta r elementos.

Corolario 2: $C(r,n) = C(r, r-n)$.

Demostrarlo por su significado conjuntista y verificarlo con la fórmula de $C(r,n)$ y en la tabla.

Atención: es frecuente escribir $\binom{r}{n}$ en vez de $C(r,n)$.

· El cálculo de número de partes de n elementos podemos hacerlo de otra forma. Supongamos que lo sabemos hacer para conjuntos de 6 elementos. ¿ Cómo podemos hacerlo para $r = 7$?



Las partes de, por ejemplo, 3 elementos, son de dos clases: las que contienen al 7º elemento y las que no lo contienen.

Estas últimas están contenidas en un conjunto de 6 elementos, y por lo tanto de ellas hay $C(6,3) = 20$.

Las que contienen al 7º se obtienen todas agregando ese elemento a las partes de 2 puntos del conjunto de los otros 6, como indica la figura. Son entonces $C(6,2) = 15$.

En resumen: $C(7,3) = C(6,3) + C(6,2) = 20 + 15 = 35$, y en general

Teorema 9: $C(r,n) = C(r-1,n) + C(r-1,n-1)$.

Este resultado explica por qué en la tabla de $C(r,n)$ cada cuadro es igual al que tiene arriba más el que está a la izquierda de éste (salvo el primero, que es siempre 1).

Así es fácil ir agregando líneas a la tabla, pues solo hace falta sumar, en vez de usar la fórmula del teorema 7. Por ejemplo, la fila del 8 sería: 1, $1+7=8$, $7+21=28$, $21+35=56$ $35+35=70$, etc.

Estas líneas de números forman un triángulo llamado de Tartaglia.

ÍNDICE

Se terminó de imprimir este libro en Buenos Aires, en los Talleres Gráficos "José Roda", Ombú 477, V. Alsina, en abril de 1966.

...tos. Esta parte, *Matemática intuitiva*, ... desarrolla el primer tomo, sobre ... de dos cursillos dictados por el ...r a profesores secundarios.

...nalidad de la segunda parte es iniciar ...udiantes en el uso del método ... no se hace con la geometría euclidiana, excesivamente complicada, sino a través del número natural, cuyos axiomas son muy pocos. El segundo tomo de esta obra, *Matemática deductiva*, desarrolla esta parte.

Oscar Varsavsky es profesor titular del Departamento de Matemática de la Universidad de Buenos Aires y trabaja en Matemática Aplicada en el Instituto del Cálculo de dicha universidad. Ha participado en la elaboración de los planes de estudio de matemática, actualmente en vigencia en las Universidades de Buenos Aires y del Sur, Argentina, y en la Universidad Central, Venezuela. Integra la Subcomisión Argentina de la Comisión Internacional de Enseñanza de la Matemática y es coautor del plan que se está experimentando.

T. S. 470

LA ESCUELA EN EL TIEMPO
TEXTOS DEL SECUNDARIO

EDITORIAL UNIVERSITARIA DE BUENOS AIRES